ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο** x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Δηλαδή: $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Αν στην ισότητα $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x=x_0+h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

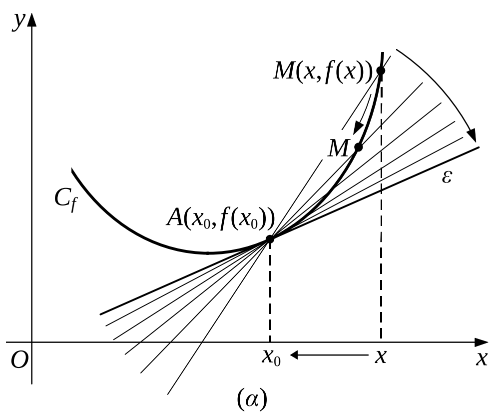
Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος Δ του πεδίου ορισμού της f, τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν τα όρια

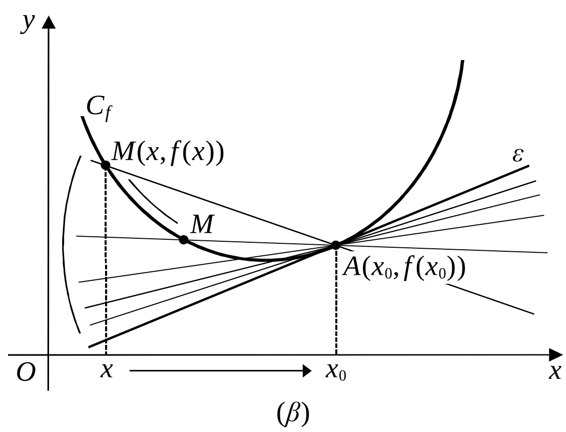
$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ και είναι ίσοι πραγματικοί αριθμοί.

Πρόβλημα εφαπτομένης

● Έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.



(α)



(β)

Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο $M(x, f(x))$, $x\neq x_0$, της γραφικής παράστασης της f και την ευθεία AM που ορίζουν τα σημεία A και M, παρατηρούμε ότι:

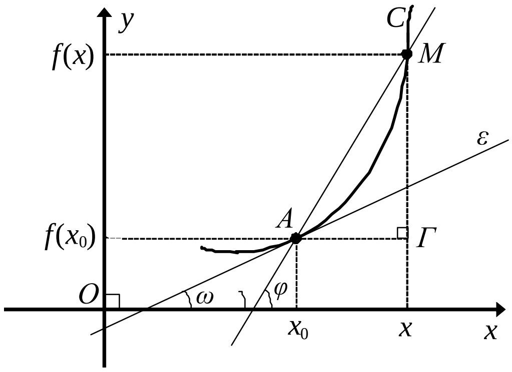
Καθώς το x τείνει στο x_0 με $x>x_0$, η τέμνουσα AM παίρνει μια οριακή θέση ε (Σχ. α).

Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το x τείνει στο x_0 με $x<x_0$ (Σχ. β).

Την οριακή θέση της AM την ονομάζουμε **εφαπτομένη της γραφ. παράστασης της f στο A**.

Επειδή η κλίση της τέμνουσας AM είναι ίση με $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα έχει κλίση το

$$\lambda = \varepsilon\varphi\omega = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$



ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A**, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\boldsymbol{\lambda = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).}$$

Επομένως, ***η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο*** $\mathbf{A(x_0, f(x_0))}$ είναι:

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}.$$

<u>Κατακόρυφη εφαπτομένη</u> *(εκτός ύλης)*

Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο x_0 και ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:

α) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ (ή $-\infty$)

β) $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ και $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$,

γ) $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ και $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$,

τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ την κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$.

● Αν μια συνάρτηση f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και **δεν** ισχύουν οι προϋποθέσεις του παραπάνω ορισμού, τότε **δεν ορίζουμε** εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

<u>Παράγωγος και συνέχεια:</u>

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Όμως αν μια συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής** σ' ένα σημείο x_0, τότε **δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη** στο x_0.

Παράγωγος συνάρτησης

● Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Θα λέμε ότι:

— Η f είναι **παραγωγίσιμη στο A** ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}.$$

● Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και $\mathbf{A_1}$ το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη.

Αντιστοιχίζοντας κάθε $\mathbf{x \in A_1}$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f': A_1 \to \mathbb{R},\ \text{όπου}\ x \to f'(x),$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f**.

Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\dfrac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}$ που διαβάζεται ***"ντε εφ προς ντε χι"***.

Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y=f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y=(f(x))'$.

Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f''.

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της f**, με $\nu\geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή

$$\boldsymbol{f^{(\nu)}=[f^{(\nu-1)}]',\quad \nu\geq 3}.$$

Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

- Η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=c}$ (σταθερή) ,c∈ ℝ, είναι **παραγωγίσιμη στο** ℝ και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή

$$\boxed{(c)'=0}$$

- Η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=x}$ (ταυτοτική) είναι **παραγωγίσιμη στο** ℝ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή

$$\boxed{(x)'=1}$$

- Η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=x^{\nu}}$, $\nu \in N-\{0,1\}$ f είναι **παραγωγίσιμη στο** ℝ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}}$$

- Η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\sqrt{x}}$ είναι **παραγωγίσιμη στο** $(0,+\infty)$ και ισχύει $\mathbf{f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$, δηλαδή

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Προσοχή ! Η $f(x)=\sqrt{x}$ **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 ενώ ορίζεται σ'αυτό.**

- Η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\eta\mu x}$ είναι **παραγωγίσιμη στο** ℝ και ισχύει $\mathbf{f'(x)=\sigma\upsilon\nu x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x}$$

- Η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\sigma\upsilon\nu x}$ είναι **παραγωγίσιμη στο** ℝ και ισχύει $\mathbf{f'(x)=-\eta\mu x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x}$$

- Αποδεικνύεται ότι η $\mathbf{f(x)=e^{x}}$ είναι **παραγωγίσιμη στο** ℝ και ισχύει $\mathbf{f'(x)=e^{x}}$, δηλαδή

$$\boxed{(e^{x})'=e^{x}}$$

- Αποδεικνύεται ότι η $\mathbf{f(x)=\ln x}$ είναι **παραγωγίσιμη στο** $(0,+\infty)$ και ισχύει $\mathbf{f'(x)=\dfrac{1}{x}}$ δηλαδή

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}}$$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Παράγωγος αθροίσματος

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε για κάθε $x \in Δ$ ισχύει:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Τα παραπάνω ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2, ..., f_k$, είναι παραγωγίσιμες στο *Δ*, τότε

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_k'(x).$$

Παράγωγος γινομένου

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε για κάθε $x \in Δ$ ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα *Δ* και $c \in \mathbb{R}$, επειδή $(c)' = 0$, σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε: $(cf(x))' = cf'(x)$

Παράγωγος πηλίκου

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα *Δ* και για κάθε $x \in Δ$ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in Δ$ έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Από τους παραπάνω κανόνες παραγώγισης προκύπτουν τα παρακάτω

- Η συνάρτηση $f(x) = x^{-ν}, ν \in N^*$ είναι **παραγωγίσιμη στο** $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -νx^{-ν-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{-ν})' = -νx^{-ν-1}}$$

- Η συνάρτηση $f(x) = εφx$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{συν^2x}$, δηλαδή

$$\boxed{(εφx)' = \frac{1}{συν^2x}}$$

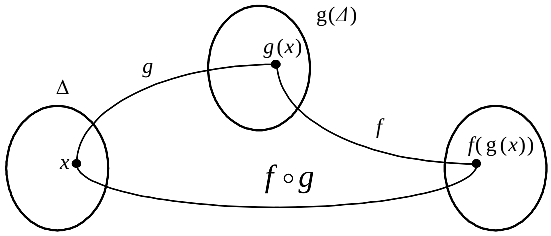
- Η συνάρτηση $f(x) = σφx$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{ημ^2x}$, δηλαδή

$$\boxed{(σφx)' = -\frac{1}{ημ^2x}}$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Αν μια συνάρτηση g **είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ** και η f **είναι παραγωγίσιμη στο** $g(\Delta)$**,** τότε η συνάρτηση $f\circ g$ **είναι παραγωγίσιμη στο Δ** και ισχύει

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x).$$



Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε: $(f(u))' = f'(u)\cdot u'$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας.**

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής:

- Η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$-Z είναι **παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$** και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

Αποδεικνύεται ότι, για $\alpha > 1$ **η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο** $x_0 = 0$ και η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο.

- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^{x}$, $\alpha > 0$ είναι **παραγωγίσιμη στο** $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^{x}\ln\alpha$, δηλαδή

$$\boxed{(\alpha^{x})' = \alpha^{x}\ln\alpha}$$

- Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^{*}$ είναι **παραγωγίσιμη στο** $\mathbb{R}^{*}$ και ισχύει:

$$\boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο x_o (αν υπάρχει) :

α) $f(x) = x^2 \cdot ημ\frac{1}{x}$, για $x \neq 0$ και $f(0) = 0$ ($x_o = 0$).

β) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>0 \\ x^2+2, & x\leq 0 \end{cases}$ ($x_o = 0$). γ) $f(x) = \sqrt{x-3}$ ($x_o = 3$).

---

2. Να βρείτε τα α , β ∈ ℝ ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+1, & x<0 \\ ax-\beta, & x\geq 0 \end{cases}.$$

---

3. Αν $g(x)=\begin{cases} f(x)ημ\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$ όπου f παρ/μη συνάρτηση στο $x_0=0$ με $f(0)=f\,'(0)=0$

να αποδείξετε ότι $g'(0)=0$.

---

4. Αν f(3) = 10 και f ΄(3) = 6 , να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(f(x))^2-100}{x^2-9}$.

---

5. Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα: $5x - x^2 \leq f(x) \leq 5x + x^4$, για κάθε $x \in ℝ$.
Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την f ΄(0) .

---

6. Αν f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\chi_0=0$ και $f\,'(0)= -1$, $g'(0)=2$, $f(0)= -1$, $g(0)= -2$ να

αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)g(x)-2}{x}=0$.

---

7. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $\chi_0=1$ και ισχύει : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$.

Να αποδείξετε ότι : i) f(1)=0 και ii) η συνάρτηση $g(x)= f(x)\sqrt{x^2+3}$ είναι παρ/μη

στο σημείο $\chi_0=1$ και να βρείτε το $g'(1)$.

---

8. Αν η συνάρτηση f είναι παρ/μη στο σημείο $\chi_0=0$ και για κάθε $\chi \in ℝ$ ισχύει

$(f(x))^3-x(f(x))^2+x^2f(x)=x^2ημx$, να αποδείξετε ότι : $f\,'(0)=1$.

---

9. Έστω f,g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και παρ/μες στο σημείο $\chi_0=0$.

Αν $\forall \chi \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \le g(x)$ και $f(0)=g(0)$, να αποδείξετε ότι $f'(0)=g'(0)$.

---

10. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2 \ln x$ ii) $g(x) = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x$

iii) $h(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}$ iv) $\varphi(x) = \eta\mu x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + \sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$

---

11. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2\eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu x$ ii) $g(x) = (x^2 + x)\ln x$

iii) $h(x) = (x^2-2x + 3)e^x$ iv) $\varphi(x) = x^2\,\eta\mu x.\ln x$

v) $s(x) = \dfrac{\ln x}{1+e^x}$ vi) $t(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$

---

12. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x}\,\eta\mu x$ β) $f(x) = \sqrt{x} + \eta\mu x$ vi) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$.

(Τι συμπεραίνετε για το άθροισμα και το γινόμενο παραγωγισίμων και μη συναρτήσεων σε σημείο x_0).

---

13. Να βρείτε, όπου ορίζεται την παράγωγο των συναρτήσεων:

$i)\ f(x) = \dfrac{1-x^2}{\sqrt{\pi}}$ ii) $f(x) = \dfrac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}$, iii) $f(x) = \dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu t}{e^x}$

$iv)\ f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ v) $f(x) = \dfrac{m}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{n}{\sqrt{x^3}}$

---

14. Να βρείτε, όπου ορίζεται την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}\,)$ ii) $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 \dfrac{x}{3}$ iii) $f(x) = \ln(2x^3 + 3x^2)$

iv) $f(x) = \ln\dfrac{x^5}{x^5+2}$ v) $f(x) = 2^{\sigma\upsilon\nu^3\chi}$ vi) $f(x) = x^2 e^{x^2}\ln x$ vii) $f(x) = \log_{x^2} x$

$viii)$ $f(x) = e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x}-1)$ ix) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ x) $f(x) = \sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\chi}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

---

15. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\geq 1 \\ 2x+1, & x<1 \end{cases}$, β) f(x) = $\dfrac{x^2+1}{x-2}$, για $x\neq 2$ και f(2) = 3

γ) f(x) = $\sqrt[5]{x^4}$, δ) f(x) = $\sqrt[5]{x^6}$

ε) $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}, & 0\leq x<1 \\ \dfrac{x^2+5}{6}, & x\geq 1 \end{cases}$ στ) $f(x)=\begin{cases} x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

ζ) $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & \alpha\nu\ x<0 \\ x^2+x+1, & \alpha\nu\ x\geq 0 \end{cases}$. η) $f(x)=5|x-4|$.

---

16. Έστω δύο συναρτήσεις παρ/μες στο $\mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{e^x}$. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{g'(x)-g(x)}{[g(x)]^2}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{[f(x)]^2}$.

---

17. Αν η πολυωνυμική συνάρτηση f(χ), βαθμού $\nu\geq 2$ και η παράγωγός της έχουν κοινή ρίζα τον αριθμό $\rho\in\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει τη ρίζα ρ τουλάχιστον διπλή και αντίστροφα.

---

18. Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$ και $f(0)\neq 0$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 , να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ και μάλιστα $f'(x)=f'(0)\cdot f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

---

19. Αν f(x) = ημx και g(x) = συνx , να δείξετε ότι : $[f^{(3)}(x)]^2+[g^{(3)}(x)]^2=1$.

---

20. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι :

α) Αν η f είναι άρτια τότε η f ΄ είναι περιττή .

β) Αν η f είναι περιττή τότε η f ΄ είναι άρτια .

---

21. Έστω οι συναρτήσεις f , g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$(f(x))^5-(g(x))^3+x^6=x^5$ και $g(-1)=1$, $g'(-1)=-2$.

Να βρείτε την παράγωγο της f στο -1 .

---

22. Βρείτε όλα τα πολυώνυμα P(x) με πραγματικούς συντελεστές για τα οποία ισχύει P(0)=9 και $[P'(x)]^2=P(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

---

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= \ln(x^2 + e^x)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f :

α) στο σημείο $A(1, f(1))$.

β) η οποία σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα χ΄χ .

---

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= e^x + 5$ και η ευθεία ε: $y = \lambda x + 5$. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ε να εφάπτεται της C_f και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής .

---

25. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\alpha x^2+\beta$ και $g(x)= e^x$, έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_o=1$. Να βρείτε :

α) τα $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$

β) την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης .

---

26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)= x^2-x$ και $g(x)= e^x-2$.

α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_o=1$ είναι η ευθεία ε: $y=x-1$.

β) Αποδείξτε ότι η ευθεία ε εφάπτεται της C_g . Να βρείτε το σημείο επαφής .

---

27. Αν $f(x)=4x-x^2$ και $g(x)= -\dfrac{1}{8x}$, να βρείτε την εξίσωση της εφ/νης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$ και να αποδείξετε ότι εφάπτεται και της C_g.

---

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$. Να βρείτε τη συνθήκη για τα $\alpha , \beta , \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να μην έχει σε κανένα της σημείο οριζόντια εφαπτομένη .

---

29. Για την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f ισχύει η σχέση:

$$f(2 + e^x) - f(2 - e^x) = -2e^x , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f'(1)= -1.$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(3, f(3))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = x+2011$.

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Ορισμός

Αν δύο μεγέθη χ και y συνδέονται με τη σχέση **y=f(x)** και f είναι συνάρτηση παρ/μη στο x_0, τότε ονομάζουμε ***ρυθμό μεταβολής του y ως προς χ στο*** x_0 την παράγωγο $\mathbf{f'(x_0)}$.

Παρατηρήσεις

1) Όταν ζητούμε τον ***ρυθμό μεταβολής μιας μεταβλητής y ως προς την t,*** η t είναι η μεταβλητή παραγώγισης έστω και αν αυτή είναι συνάρτηση.

2) Όταν μας δίνουν ένα μέγεθος y=f(t) όπου t είναι ο χρόνος:

α) **αν αυξάνεται σταθερά κατά κ μονάδες /sec**, (κ>0) τότε ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς t σε κάθε t_0 είναι : dy/dt =f ′(t)= κ μον. /sec.

β) **αν μειώνεται σταθερά κ μονάδες /sec**, είναι ομοίως: dy/dt= f ′(t)= -κ μον. /sec.

3) Αν ο ρυθμός μεταβολής είναι **θετικός** σημαίνει **<<τάση>> για αύξηση**, ενώ αν είναι **αρνητικός** σημαίνει **<<τάση>> για ελάττωση.**

4) Οι **μονάδες του ρυθμού μεταβολής f ′(x)** είναι το πηλίκο των μονάδων μέτρησης του μεγέθους y προς τις μονάδες του μεγέθους χ.

Παραδείγματα

— Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $S = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιμή *t*. Η συνάρτηση *S* καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή *t* και ονομάζεται **συνάρτηση θέσης** του κινητού.

- **Ο ρυθμός μεταβολής της S ως προς το χρόνο *t* τη χρονική στιγμή** t_0 είναι η παράγωγος $S'(t_0)$, της S ως προς το χρόνο *t* τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $S'(t_0)$ λέγεται **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\upsilon(t_0)$. Είναι δηλαδή $\boldsymbol{\upsilon(t_0) = S'(t_0)}$.
- **Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας *υ* ως προς το χρόνο *t* τη χρονική στιγμή** t_0 είναι η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$, της ταχύτητας *υ* ως προς το χρόνο *t* τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$. Είναι δηλαδή $\boldsymbol{\alpha(t_0) = \upsilon'(t_0) = S''(t_0)}$.

— Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής *K*, η είσπραξη *E* και το κέρδος *P* εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας *x* του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους *K* ως προς την ποσότητα *x*, όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος στο** $\boldsymbol{x_0}$.

Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο** $\boldsymbol{x_0}$ και **οριακό κέρδος στο** $\boldsymbol{x_0}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πρόβλημα

Ο όγκος V ενός μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνει με ρυθμό $100cm^3/sec$.Με ποιο ρυθμό αυξάνει η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή που αυτή είναι ίση με 9cm;

1) ***Προσδιορίζουμε*** *και συμβολίζουμε* ***όλα τα μεταβλητά μεγέθη*** *συναρτήσει της ανεξάρτητης μεταβλητής χ και* ***συμβολίζουμε*** $\boldsymbol{\chi_0}$ ***το κρίσιμο σημείο*** *στο οποίο ζητούμε τον ρυθμό μεταβολής. τον οποίο και γράφουμε με μορφή παραγώγου.*	Έστω V(t) ο όγκος του μπαλονιού την χρονική στιγμή t οπότε η ακτίνα του είναι r(t). Έστω t_0 η χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει οπότε $r(t_0)=9cm$ και ο όγκος του τότε θα είναι $V(t_0)$. Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι $r'(t_0)$. Δίνονται: $V'(t)=100cm^3/sec$, $r(t_0)=9cm$.
2) ***Βρίσκουμε εξίσωση*** *(1) που συνδέει τις παραπάνω μεταβλητές*	$V(t)={}^4/_3\,\pi\, r^3(t)$ (1)
3) ***Παραγωγίζουμε*** *τα μέλη της εξίσωσης (1) και* ***βρίσκουμε*** *εξίσωση (2) για* $\chi=\chi_0$.	$V'(t)=4\pi\, r^2(t)\, r'(t)$ οπότε για $t=t_0$ έχω $V'(t_0)=4\pi\, r^2(t_0)\, r'(t_0)$ (2)
4) ***Υπολογίζουμε τις τιμές των μεταβλητών και βρίσκουμε το ζητούμενο ρυθμό μεταβολής*** *αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2)*	Αντικαθιστώντας στη (2) έχω $100cm^3/sec=4\pi\,(9cm)^2\, r'(t_0)$ $\Leftrightarrow 25cm^3/sec=81\pi\, cm^2\, r'(t_0)$ $\Leftrightarrow r'(t_0)=\dfrac{25}{81\pi}$ cm/sec

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Η ακτίνα ενός κύκλου δίνεται από τον τύπο $r(t)=3-t$, $t\in[0,3]$, r σε m και t σε sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και του μήκους του ως προς το χρόνο t.

---

2. Δύο σημεία Α,Β κινούνται στους ημιάξονες Οχ,Οψ αντίστοιχα ξεκινώντας ταυτόχρονα από το σημείο Ο με ταχύτητες $\upsilon_A=20$ m/sec,$\upsilon_B=15$ m/sec.Να βρεθούν:

α) ο ρυθμός μεταβολής της μεταξύ τους απόστασης 6sec αργότερα.

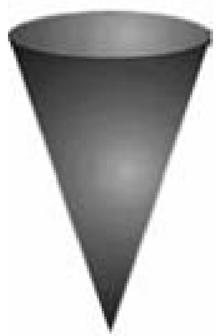
β) ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ την ίδια χρονική στιγμή.

---

3. Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στην υπερβολή με εξίσωση $3\chi^2-\psi^2=12$. Η ταχύτητα της τεταγμένης του είναι 6 m/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $\chi=4$cm.

---

4. Αντλούμε νερό από μια δεξαμενή σχήματος κώνου με ακτίνα βάσης 5m και βάθους 12m με σταθερό ρυθμό μεταβολής 5 m^3/h Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του βάθους του νερού, όταν το ύψος του κώνου που σχηματίζει το νερό της δεξαμενής είναι 6m.



Δίνεται ότι: $V=\frac{1}{3}E_\beta h$

---

5. Ένας προβολέας βρίσκεται σε ύψος 15m ψηλότερα από το έδαφος. Ένας άνθρωπος που έχει ύψος 1,8m απομακρύνεται από το σημείο που βρίσκεται κάτω από τον προβολέα με ταχύτητα 6m/sec. Αν ο προβολέας είναι στραμμένος πάνω του, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της σκιάς του ανθρώπου.

---

6. Ο όγκος μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό π cm^3/sec.

i) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας της σφαίρας ως προς τον χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 που η ακτίνα της είναι $r=1/4$ cm.

ii) Ποια είναι η ακτίνα της σφαίρας τη χρονική στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της είναι 2 cm^2/sec.

---

7. Δύο πουλιά Α και Β πετούν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο σε ευθύγραμμες οριζόντιες τροχιές με υψομετρική διαφορά 3m έχοντας μέση σταθερή ταχύτητα υ=10m/sec και με αντίθετη φορά. Κατά τη χρονική στιγμή 0 τα πουλιά βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο. Πόσο θα απέχουν τα πουλιά , όταν ο ρυθμός μεταβολής της απόστασής τους είναι 10;

----

8. Χρωματιστό υγρό πέφτει σε ρούχο και απλώνεται σχηματίζοντας κυκλική κηλίδα της οποίας το εμβαδό αυξάνει με ρυθμό μεταβολής $5cm^2$/min. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας κατά τη χρονική στιγμή κατά την οποία το εμβαδό της κηλίδας είναι $36\pi cm^2$.

----

9. Μια ευθεία κινείται γύρω από το σημείο Κ(1,2) και τέμνει τον θετικό ημιάξονα Οχ σ' ένα σημείο Α. Αν το σημείο Α κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 cm/sec,να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ =ΟΚΑ ως προς το χρόνο t κατά τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο Α βρίσκεται στη θέση $A_0(5/3, 0)$.

----

10. Ένα σημείο Β κινείται πάνω στον κύκλο $\chi^2+\psi^2=6$ με σταθερή ταχύτητα 2cm/sec ξεκινώντας από το σημείο Α($\sqrt{6}$,0). Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μήκους της χορδής ΑΒ ως προς το χρόνο t κατά τη χρονική στιγμή t_0 που η γωνία θ= $A\hat{O}B$ είναι ίση με π/3.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Θεώρημα Rolle

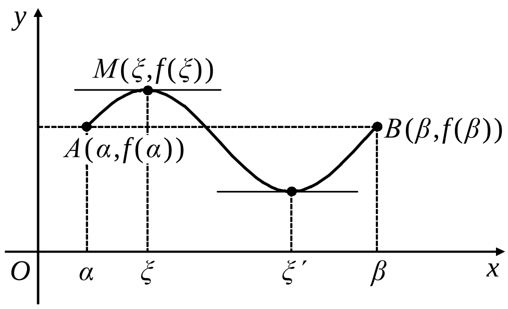
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής στο κλειστό** διάστημα $[\alpha,\beta]$
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό** διάστημα (α,β) και
- $\mathbf{f(\alpha)=f(\beta)}$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\boldsymbol{\xi\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο, ώστε: $\mathbf{f'(\xi)=0}$.

Δηλαδή η εξίσωση f΄(x)=0 έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο (α,β).

<u>Γεωμετρικά,</u> αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



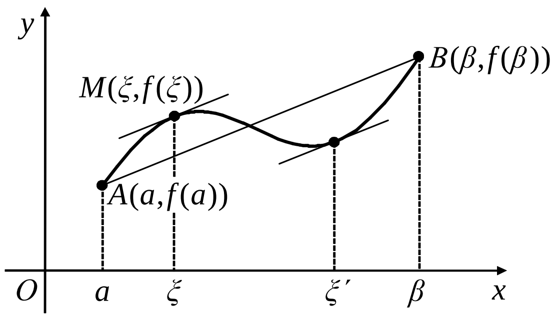
Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής στο κλειστό** διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό** διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\boldsymbol{\xi\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο, ώστε: $\mathbf{f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}}$.

<u>Γεωμετρικά,</u> αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2+\alpha x+2, & x\in[-1,0) \\ \beta\sigma\upsilon\nu\chi+\gamma\ , & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Για ποιες τιμές των α,β,γ ισχύει το θ.Rolle στο [-1,π/2] για τη συνάρτηση f ;

---

2. Έστω f,g δύο συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες:

i) Είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα [α,β]

ii) $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f(x)\neq 0$ $x\in(\alpha,\beta)$.

Να αποδείξετε ότι:

a) Για τη συνάρτηση $h(x) = f(x)e^{-g(x)}$, $x\in[\alpha,\beta]$ εφαρμόζεται το *Θ. ROLLE* στο διάστημα [α,β].

b) Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $A(x_0,g(x_0))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία δ: $f'(x_0).x - f(x_0).\psi + \kappa = 0$.

---

3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) κα $f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2-\beta^2$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_0) = 2x_0$.

---

4. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο [α,β], παραγωγίσιμες στο (α,β) με $f(\alpha) = f(\beta)e^{g(\beta)-g(\alpha)}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_0) + f(x_0).g'(x_0) = 0$.

---

5. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $10f(x)\leq 6f(5)+4f(3)$ για κάθε x, να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ με $f'(\xi) = 0$.

---

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-1,1] και παραγωγίσιμη στο (-1,1), να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$τέτοιο, ώστε $2f'(\xi) = 5\xi^4(f(1)-f(-1))$.

---

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,2] και παραγωγίσιμη στο (0,2), να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = f'(2-\xi)$.

---

8. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{2\xi f(\xi)}{1-\xi^2}$.

---

9. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει f(1) = 1, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0>0$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_0) = 2-\dfrac{f(x_0)}{x_0}$.

---

10. Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,γ] και ισχύουν f(α) = f(γ) και f΄(α) = f΄(γ) = 0, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_1, x_2 \in (\alpha,\gamma)$ τέτοια, ώστε $f''(x_1) = f''(x_2)$.

---

11. Η συνάρτηση f: $[1,4] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν f(1) = 2 και f(4) = 8. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

---

12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) με f(α) = $\sqrt{3}\beta$ και f(β) = $\sqrt{3}\alpha$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M(ξ,f(ξ)), να σχηματίζει με τον άξονα χ΄χ γωνία ω = $\frac{2\pi}{3}$.

---

13. Αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [0,3], να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,3)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = f(3) - f(0)$.

---

14. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [1,3] με f(1) = 2006 και $-\frac{1}{2} \le f'(x) \le \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in (1,3)$, να αποδείξετε ότι $2005 \le f(3) \le 2007$.

---

15. Αν η συνάρτηση f΄(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και είναι f(0) = 0, να αποδείξετε ότι: f΄(1)<f(1)< f΄(0).

---

16. Να αποδείξετε ότι:

i) $2 - \frac{e}{\pi} < \ln\pi < \frac{\pi}{e}$ ii) $2 - \frac{e}{3} < \ln 3 < \frac{3}{e}$.

---

17. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$, αν x>0. ii) $1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$, αν -1<x<0.

iii) $\left|\eta\mu^2\beta - \eta\mu^2\alpha\right| \le |\beta - \alpha|$. iv) $x < e^{x-1} < 1 + (x-1)e$, αν $x \in (1,2)$.

---

18. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) με f(0) = f(2). Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $\alpha,\beta \in (0,2)$ τέτοια ώστε: f΄(α) + f΄(β) = 0. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.

---

19. Αν ισχύουν $\alpha < \gamma < \beta$, και f΄(γ) = 0 και $|f''(x)| \le \theta$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $|f'(\alpha) + f'(\beta)| \le \theta(\beta - \alpha)$.

---

20. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία έχει με τη C_f δύο τουλάχιστον κοινά σημεία, να αποδείξετε ότι:

i) Η f΄ δεν είναι 1-1.

ii) Υπάρχει $x_0 \in R$ με $f''(x_0) = 0$.

----

21. Η συνάρτηση f: $[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) και συνεχής με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με $f(x_0)>0$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)< 0$,

ii) αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με $f(x_0)< 0$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)> 0$.

----

22. Η συνάρτηση f: $[0,4] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα [0,4], παραγωγίσιμη στο (0,4). Αν $f(0) = -3$ και $f'(x)> 1$ για κάθε $x \in (0,4)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,4).

----

23. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,1], με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι: i) υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f(\gamma) = \frac{1}{2}$,

ii) υπάρχουν ξ_1, $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε: $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$.

----

24. Έστω α>0 και η δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [-α,α] συνάρτηση g.
Αν $2g(0) = g(\alpha) + g(-\alpha)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-\alpha,\alpha)$ τέτοιο, ώστε: $g''(\xi) = 0$.

----

25. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) με f(α)=f(β)=0.
Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση g με $g(\chi)=f(\chi)\sqrt{\chi - c}$,όπου c<α<β, να δείξετε ότι:

i) Υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να είναι $g'(\xi)=0$.

ii) Υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(\chi_0,f(\chi_0))$ της γραφικής παράστασης c_f της f να διέρχεται από το σημείο $(c, \frac{3}{2}f(x_0))$.

----

26. ¨Εστω η συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β).
Αν υπάρχει $\gamma \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να είναι α,γ,β, διαδοχικοί όροι αριθμ. προόδου και f(α),f(γ),f(β) διαδοχικοί όροι αριθμ. προόδου, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f''(\xi)=0$.

----

27. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β).

α) Αν ισχύει: $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \frac{1}{2}\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιοι, ώστε να είναι : $f'(\xi_1)-f'(\xi_2)=0$.

β) Αν ισχύει f(α)=f(β) να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιοι, ώστε να είναι: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

Σταθερές Συναρτήσεις

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*.
Αν η *f* είναι συνεχής στο *Δ* και $\mathbf{f'(x)=0}$ για κάθε ***ε σ ω τ ε ρ ι κ ό*** σημείο *x* του *Δ*,

τότε η ***f* είναι σταθερή** σε όλο το διάστημα *Δ*.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα *Δ*. **Αν** οι $\mathbf{f, g}$ **είναι συνεχείς στο διάστημα *Δ*** και $\mathbf{f'(x)=g'(x)}$ για κάθε ***ε σ ω τ ε ρ ι κ ό*** σημείο *x* του *Δ*,

τότε υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $\mathbf{f(x)=g(x)+c}$

Προσοχή !!
Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ***ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.***

Π.χ. Η συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} 2009, & x<0 \\ 2010, & x>0 \end{cases}$ έχει ***f ΄(χ)=0*** για κάθε x $\in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ενώ ***δεν είναι σταθερή***.

Σχόλια

- Όταν θέλουμε να βρούμε τον τύπο μιας σταθερής συνάρτησης φ(χ) σε ένα διάστημα Δ αρκεί να βρούμε την τιμή της $\varphi(\chi_0)=c$ για κάποιο χ_0 με $\chi_0 \in \Delta$. Τότε φ(χ)=c, $\forall x \in \Delta$.

- Όταν θέλουμε να βρούμε τον τύπο μιας συνάρτησης f(x) για την οποία ισχύει ότι
  f ΄(x)=g(x) σε ένα διάστημα Δ,
  βρίσκουμε μια παράγουσα G(x) της g στο Δ οπότε γράφεται:
  f΄(x)=G΄(x) , $\forall x \in \Delta$ άρα f(x)=G(x) +c, $\forall x \in \Delta$.

- Γενικά για την εύρεση του τύπου μιας συνάρτησης f(x) από μια συναρτησιακή σχέση προσπαθούμε να την μετασχηματίσουμε σε μια σχέση της μορφής:
  F΄(x)=G΄(x), $\forall x \in \Delta$ οπότε αυτή δίνει ότι ***F(x)=G(x) +c***, $\forall x \in \Delta$.
  Από την τελευταία προσπαθούμε να βρούμε την f(x).

- Αν η συναρτησιακή σχέση είναι της μορφής ***f΄(x)+α(x)f(x)=β(x),*** $\forall x \in \Delta$ (1)
  Βρίσκουμε μια παράγουσα Α(χ) της α(χ) οπότε Α΄(χ) = α(χ) και πολλαπλασιάζοντας την (1) με $e^{A(x)}$ έχουμε: $e^{A(x)}$ f΄(x)+α(x) $e^{A(x)}$ f(x)=β(χ) $e^{A(x)}$ $\Leftrightarrow \left(e^{A(x)} f(x)\right)' = \left(\gamma(x)\right)'$

  $\Leftrightarrow \left(e^{A(x)} f(x)\right)' = \left(\gamma(x)\right)'$ οπότε: $e^{A(x)} f(x) = \gamma(x) + c$, …..

- Βάσει εφαρμογής του σχολικού βιβλίου:
  Αν f΄(x)=f(x) , $\forall x \in \mathbb{R}$ τότε f(x)=ce^x , $\forall x \in \mathbb{R}$ και επειδή ισχύει και το αντίστροφο:
  f ΄(x)=f(x) , $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ ***f(x)=ce^x ,*** $\forall x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύουν: $f(0) = \alpha$ και $f'(x) = \alpha f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)\, f(-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της.

---

2. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0,5)$ και ισχύει $f(x) = \frac{x}{3} f'(x)$ για κάθε $x \in A$ και $f(2) = -16$, τότε:

i) να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$ είναι σταθερή,

ii) να βρεθεί η συνάρτηση f.

---

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) = 2f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) + f^2(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

---

4. Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x f'(x) + 2f(x) = 0$ για κάθε $\chi > 0$ και $f(1) = 4$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = x^2 f(x)$, $x \in (0, +\infty)$, είναι σταθερή και να βρείτε την τιμή της. Επίσης να βρεθεί το $f(2)$.

---

5. Να βρεθεί η συνάρτηση f αν :

α) $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(5) = 7$.

β) $f'(x) = 3x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = -1$.

---

6. Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = (2,5) \cup [8,10]$ και ισχύει $f'(x) = 2x$ για κάθε $x \in A$. Αν $f(3) = 10$ και $f(10) = 25$, να βρεθεί η συνάρτηση f.

---

7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

---

8. Να βρεθεί η συνάρτηση f αν :

i) $f'(x) = 6x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 2$.

ii) $f'(1-2x) = 7-12x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 2$.

iii) $f'(x) = -\frac{1}{\chi^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $f(-1) = f(1) = 2$.

iv) $f''(x) = e^x + \text{συν}x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 2$, $f(0) = 0$.

---

9. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f\,'(x) = \begin{cases} 2x, & x>1 \\ e^x, & x<1 \end{cases}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο Α(1 , 0) να βρεθεί ο τύπος της f .

---

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) = -f(x)$ για κάθε $x\in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 3$, να βρεθεί ο τύπος της f.

---

11. Η κλίση της παραγωγίσιμης συνάρτησης f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στο τυχαίο σημείο M(x,f(x)) είναι ίση με το διπλάσιο της τιμής της f στο x. Αν $f(0) = 1$, να βρεθεί ο τύπος της f.

---

12. Να βρεθεί η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2},\ x \in \Re, \text{ και } f(-1) = 1.$$

---

13. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 2$, για την οποία ισχύει:

$(f(x)-e^x)\,(f'(x)-e^x) = 0$ για κάθε $x\in R$.

i) Να αποδείξετε ότι $(f(x)-e^x)^2 = 1$.

ii) Να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x)-e^x$ διατηρεί σταθερό θετικό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

iii) Να βρείτε τον τύπο της f.

---

14. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

i) Να αποδειχθεί ότι $f\,'(x)=xf(x)$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x)=\lambda e^{\frac{x^2}{2}}$.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $xf(x)=2x+f'(x)$ και $f(0)=0$.

---

15. Να βρείτε τη συνάρτηση f, αν για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$ ισχύει $f\,'(x)e^{f(x)}=2x+1$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο Α(1,f(1)),έχει εφαπτ/νη με συντελεστή διεύθυνσης 3/5.

Μονοτονία Συνάρτησης – Τοπικά Ακρότατα

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ***σ υ ν ε χ ή ς*** σε ένα διάστημα Δ.

- **Αν $f'(x)>0$** σε κάθε ***ε σ ω τ ε ρ ι κ ό*** σημείο x του Δ,

  τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**
- **Αν $f'(x)<0$** σε κάθε ***ε σ ω τ ε ρ ι κ ό*** σημείο x του Δ,

  τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

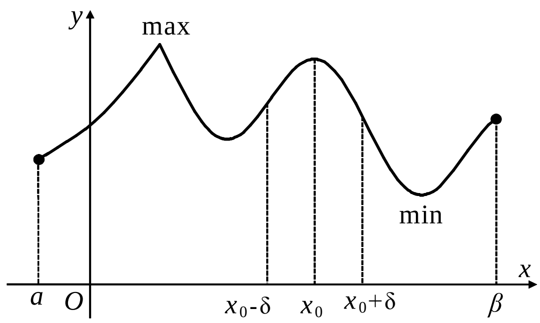
Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**.
Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $\mathbf{x_0 \in A}$ **τοπικό μέγιστο**, όταν **υπάρχει $\delta>0$**, τέτοιο ώστε

$\mathbf{f(x) \le f(x_0)}$ για κάθε $\mathbf{x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)}$.

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f.**



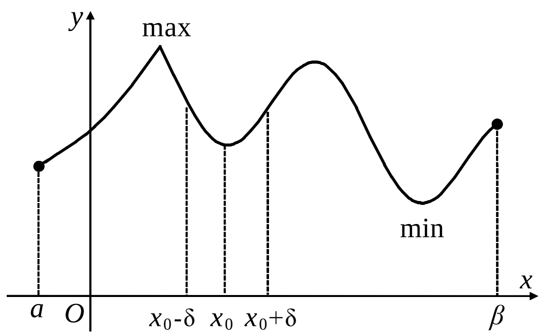
Αν η ανισότητα $f(x) \le f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο,** το $f(x_0)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $\mathbf{x_0 \in A}$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν **υπάρχει $\delta>0$**, τέτοιο ώστε

$\mathbf{f(x) \ge f(x_0)}$ για κάθε $\mathbf{x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)}$.

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f.**



Αν η ανισότητα $f(x) \ge f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το $f(x_0)$.

Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων.** Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** ή απλά **ακρότατα** αυτής.

ΣΧΟΛΙΑ

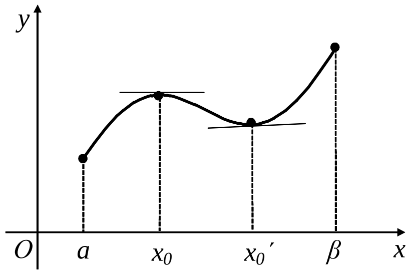
i) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο

ii) ***Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο***, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ ***αν παρουσιάζει, ελάχιστο,*** τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.. Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης .

Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα $Δ$ και $\mathbf{x_0}$ ένα **εσωτερικό** σημείο του $Δ$. **Αν** η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό,

τότε: $$\mathbf{f'(x_0)=0}$$



Σύμφωνα με το προηγούμενο ***π ι θ α ν έ ς θ έ σ ε ι ς τ ω ν τ ο π ι κ ώ ν α κ ρ ο τ ά τ ω ν*** μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα $Δ$ είναι:

1. ***Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.***

2. ***Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.***

3. ***Τα άκρα του Δ*** *(αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).*

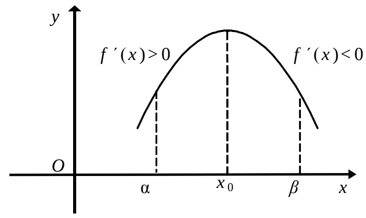
Τα *ε σ ω τ ε ρ ι κ ά* σημεία του $Δ$ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται ***κρίσιμα σημεία*** της f στο διάστημα $Δ$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $(α,β)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

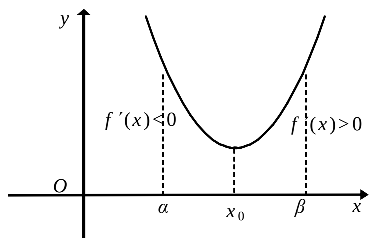
i) Αν $\mathbf{f'(x)>0}$ στο $(α,x_0)$ και $\mathbf{f'(x)<0}$ στο $(x_0,β)$, τότε το $\mathbf{f(x_0)}$ **είναι τοπικό μέγιστο** της f.

x	α		x0		β
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	



ii) Αν $\mathbf{f'(x)<0}$ στο $(α,x_0)$ και $\mathbf{f'(x)>0}$ στο $(x_0,β)$, τότε το $\mathbf{f(x_0)}$ **είναι τοπικό ελάχιστο** της f.

x	α		x0		β
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘		↗	



iii) Αν η $\mathbf{f'(x)}$ **διατηρεί πρόσημο στο** $(α,x_0)\cup(x_0,β)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι ***γνησίως μονότονη στο*** $(α,β)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ii) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

iii) $f(x) = (x-1)e^{x} - (x+1)e^{-x}$ iv) $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$

v) $f(x) = x^2(\ln x - \frac{3}{2}) - x(\ln x - 2) + 2$.

---

2. Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \ln|x| + \frac{2}{x^2}$ ii) $f(x) = x\ln x - \frac{x^2}{2} + 3$

iii) $f(x) = \begin{cases} e^x - ex, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ v) $f(x) = |x^2 - 7x|$.

---

3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[\nu]{x} - \sqrt[\nu]{x+2}, \nu \in N^*, \nu > 2$

i) να μελετήσετε τη μονοτονία της f

ii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[\nu]{\nu} + \sqrt[\nu]{\nu+4}, 2\sqrt[\nu]{\nu+2}, \nu \in N^*, \nu > 2$.

---

4. i) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, με x>0.

ii) Να βρεθεί ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots, \sqrt[\nu]{\nu}$ ($\nu \in N$ με $\nu \ge 2$).

---

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\ln x - x + 1 = 0$ ii) $xe^x + 1 = e^x$ iii) $2x^2 + x + 3\ln x - 3 = 0$.

---

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\ln x = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα [1,e].

---

7. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 3\alpha x^2 + 12x + 2$, να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

---

8. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

i) $\ln(x+1) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ για κάθε $x \ge 0$

ii) $e^x \ge 1 + \ln(1+x)$ για κάθε x>-1

iii) xημx + συνx>1 για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

iv) $x^2 + \ln(\text{συν}x) \ge 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

---

9. i) Να αποδείξετε ότι $x\ln x + 1 > x$ για κάθε $x>0$ και $x\neq 1$.

ii) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$

iii) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό μ που ικανοποιεί τη σχέση $(\mu+1)^2\ln(\mu^2+5) = (\mu^2+4)\ln(\mu^2+2\mu+2)$.

---

10. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha\in R$, τότε ισχύει $f(x)\leq f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ για κάθε $x\in R$.

---

11. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύουν $f(\alpha)=f(\beta)=1$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδειχθεί ότι $f(x)<1$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

---

12. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,1] με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $f(0)=f(1)=0$, να αποδείξετε ότι είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

---

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$.

i) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f.

ii) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τέσσερις ακριβώς πραγματικές ρίζες, δύο αρνητικές και δύο θετικές.

---

14. Αν $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}<\dfrac{\beta}{\alpha}$.

---

15. Έστω συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και f' γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδειχθεί ότι: $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)>\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

---

16. Εστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει : $f''(\chi)+[f'(\chi)]^2\neq 0$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(\chi)=e^{f(x)-e}$,να δείξε-τε ότι η συνάρτηση g δεν μπορεί να έχει περισσότερα από ένα τοπικά ακρότατα..

---

17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f''(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία της γραφικής παράστασης της f που να είναι συνευθειακά.

---

18. Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ και ισχύει ότι $\alpha^x+\beta^x+\gamma^x\geq 3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι: $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$.

---

19. Να αποδείξετε ότι αν για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $(f(x))^2+8f(x)=e^x+x^3+2x+1$ τότε η f δεν έχει ακρότατα.

---

20. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f^3(x) + x f(x) = x+2$, τότε η f δεν έχει ακρότατα.

---

21. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, $A(1,2)\in C_f$, και $f(x)\le x^2+x$ για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι $f\,'(1) = 3$.

---

22. Αν για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x + \dfrac{\alpha}{x} \ge \alpha$, να βρείτε το α.

---

23. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$(1+e^{1-x})\, f(x)+\sigma\upsilon\nu\pi x \ge 3 \text{ για κάθε } x\in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο A(1,2).

---

24. Έστω οι συναρτήσεις $f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν: $f(x) \ge x+1$ και $f(x)e^{g(x)} = e^x - x$ για κάθε $x\in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο A(0,1), να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο $x_0=0$, τέμνονται κάθετα.

---

25. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη δύο φορές και ισχύει $2f(x^2)- f^2(x) \ge 1$ για κάθε $x\in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

i) Υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f\,'(x_0)=0$

ii) $f\,'(0)= f\,'(1)$.

iii) Η εξίσωση $f\,''(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (0,1).

---

26. Έστω η συνάρτηση $f: (0,1)\to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη τρεις φορές με $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν υπάρχουν x_1, $x_2\in(0,1)$ με $x_1\ne x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f\,'''(\xi) = 0$.

---

27. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ ii) $f(x) = x^4\ln x$ iii) $f(x) = \dfrac{e^x}{2x}$ iv) $f(x) = -x^2e^x$

v) $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{e^x}$, $x\in(0,2\pi)$ vi) $f(x) = (2x^2-8x)\ln x-x^2+8x$.

---

28. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x, & x\le 2 \\ \ln(x-1), & x>2 \end{cases}$ ii) $f(x) = \begin{cases} 1-e^{x-1}, & x\ge 1 \\ \ln(1-x), & x<1 \end{cases}$.

---

29. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^4-4x^3+4x^2-\dfrac{1}{2}$, $x\in \mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

---

30. Για ποια τιμή της θετικής σταθεράς α η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^{\alpha}e^{2\alpha - x}, x > 0$, γίνεται ελάχιστη;

---

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 - 2(\ln\lambda)x + 1$, $\lambda \geq 1$.
Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ελάχιστη τιμή της f να γίνεται ελάχιστη.

---

32. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $3x^4 - 4x^3 + \alpha \geq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

---

33. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = \frac{3}{2}\chi$ και το σημείο $A(\frac{11}{4}, 0)$.

i) Να βρείτε σημείο Β της παραβολής που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

iii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο Β είναι κάθετη στην ΑΒ.

---

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2$ και το σημείο Α(9,0). Να βρείτε το σημείο Β της γραφικής παράστασης της f ώστε το μήκος (ΑΒ) να είναι ελάχιστο.

---

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln x$.

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να δείξετε ότι $x - \ln x \geq 1$ για κάθε $\chi > 0$.

iii) Θεωρούμε το σημείο $A(x, \ln x)$ και έστω Β το συμμετρικό του ως προς την ευθεία $y = x$. Να βρείτε τη θέση του σημείου Α για να είναι το μήκος (ΑΒ) ελάχιστο.

---

36. Η ημερήσια παραγωγή 20 πηγαδιών άντλησης πετρελαίου είναι 4000 βαρέλια. Για κάθε νέο πηγάδι η παραγωγή κάθε πηγαδιού μειώνεται κατά 5 βαρέλια. Να βρείτε τον αριθμό των νέων πηγαδιών ώστε να έχουμε την μέγιστη ημερήσια παραγωγή.

---

37. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(2,3) και σχηματίζει με τους ημιάξονες Οχ και Οy τρίγωνο με το ελάχιστο εμβαδόν.

---

38. Ένα φορτηγό καταναλώνει για καύσιμα $\frac{\upsilon^2}{4}$ δραχμές την ώρα, όπου υ η ταχύτητά του σε km/h. Τα άλλα έξοδά του ανέρχονται σε 1600 δρχ την ώρα. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινείται προκειμένου να καλύψει μια απόσταση 540 km, με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

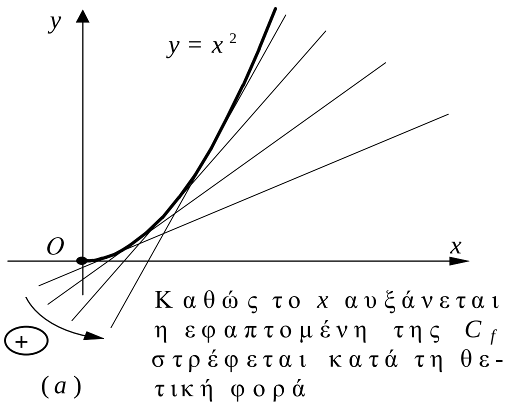
---

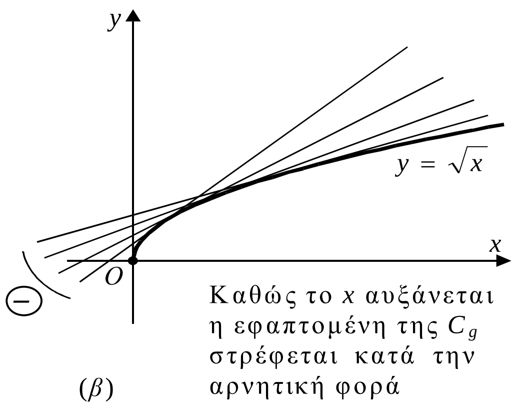
39. Δίνεται η παραβολή $\psi = \chi^2$. Να βρεθεί το πλησιέστερο σημείο της παραβολής στην ευθεία $\psi = 3\chi - 5$.

ΚΥΡΤΑ-ΚΟΙΛΑ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

Κοίλα - κυρτά συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο διάστημα $[0,+\infty)$.





Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται:

- η κλίση $f'(x)$ της C_f αυξάνεται, δηλαδή η f' είναι γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$ (Σχ.α),
- η κλίση $g'(x)$ της C_g ελαττώνεται, δηλαδή η g' είναι γν. φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ (Σχ.β).

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η ***f* στρέφει τα κοίλα προς τα άνω** στο $[0,+\infty)$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι η ***g* στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** στο $[0,+\infty)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μία συνάρτηση f **συνεχής σ' ένα διάστημα Δ** και **παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.** Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο *Δ*,

  αν η $\mathbf{f'}$ ***είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.***
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο *Δ*,

  αν η $\mathbf{f'}$ ***είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.***

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση *f* είναι ***κυρτή*** (αντιστοίχως κοίλη) ***σ' ένα διάστημα Δ,*** τότε ***η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω"*** (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f *συνεχής* σ' ένα διάστημα *Δ* και δυο φορές παραγωγίσιμη στο *εσωτερικό* του *Δ*.

- Αν $\mathbf{f''(x)>0}$ **για κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ***, τότε η f είναι **κυρτή στο *Δ***.
- Αν $\mathbf{f''(x)<0}$ **για κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*,** τότε η f είναι **κοίλη στο *Δ*.**

ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Μπορεί μια συνάρτηση να είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ χωρίς να είναι απαραίτητα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Σημεία καμπής

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι **κυρτή στο (α, x_0)** και **κοίλη στο (x_0, β)**, ή αντιστρόφως, και
- η C_f **έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$**, τότε

το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η ***f* παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**.

Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f "διαπερνά" την καμπύλη.

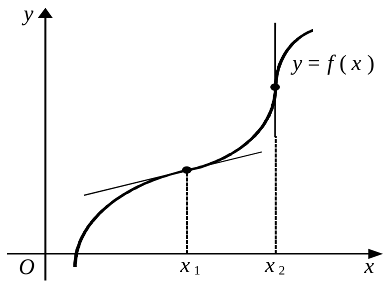
ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν το **$A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f και **η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη**, τότε $f''(x_0) = 0$.

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

Δηλαδή αν **$f''(x_0) = 0$ δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η f παρουσιάζει στο** $(x_0, f(x_0))$ **σημείο καμπής.**

Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος *Δ* στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν δεν είναι θέσεις σημείων καμπής.



Επομένως, ***<u>οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής</u>*** μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα *Δ* είναι:

i) **τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η f'' μηδενίζεται, και**

ii) **τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία δεν υπάρχει η f''.**

Γενικά:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f'' **αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του** x_0 και
- **ορίζεται εφαπτομένη** της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι **σημείο καμπής**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη όταν:

i) $f(x) = x\ln\frac{1}{x}$ ii) $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$ iii) $f(x) = x^x$ iv) $f(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2$.

---

2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της C_f, όταν:

i) $f(x) = \sqrt{x}\ln\sqrt{x}$ ii) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

iii) $f(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - 3e^x + 2$ iv) $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$.

---

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\ln x$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

---

4. Να αποδείξετε ότι η C_f της συνάρτησης : $f(x) = 2x^4+4\alpha x^3+3(2\alpha^2-4\alpha+5)x^2+\alpha x+1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ δεν έχει σημεία καμπής.

---

5. Έστω g μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $(g(x))^2 = 5g(x)- e^x-\alpha^x+2005$ για κάθε $x\in \mathbb{R}$ και $1 \neq \alpha>0$. Να αποδείξετε ότι η C_g δεν έχει σημεία καμπής.

---

6. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g κοίλη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) Οι C_f, C_g έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

ii) Αν οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάποιο κοινό σημείο τους, τότε οι C_f και C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

---

7. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = -x^4+2\alpha x^3-6x^2+3x-1$ να είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

---

8. Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι αν η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, τότε αυτό είναι και ολικό ελάχιστο της f.

---

9. Για την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν η f να έχει στο x_0 τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.

---

10. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και κυρτή στο Δ.

i) Αν $\alpha,\beta \in \Delta$ με α<β, να αποδειχθεί ότι: $f(\alpha)+f(\beta)>2f(\frac{\alpha+\beta}{2})$.

ii) Να αποδειχθεί ότι:

α) η συνάρτηση g(x) = xlnx είναι κυρτή στο διάστημα $(0,+\infty)$.

β) $\alpha^{\alpha}\beta^{\beta} > \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta}$ για κάθε 0<α<β.

---

11. Έστω η συνάρτηση f(x) = ln(lnx).

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της f.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη στο D_f.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x_0=e.

iv) Να δείξετε ότι $\ln(\ln x) \le \frac{x}{e} - 1$ για κάθε x>1.

v) Αν $\alpha,\beta \in D_f$, να δείξετε ότι $\ln\frac{\alpha+\beta}{2} \ge \sqrt{\ln\alpha \cdot \ln\beta}$.

---

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta\ln x + \beta x$.

α) Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, ώστε το Α(1,3) να είναι σημείο καμπής της C_f.

β) Για α = 4 και β = -1:

i) Να βρείτε τα διαστήματα που η C_f είναι κυρτή ή κοίλη.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.

iii) Να δείξετε ότι $4\sqrt{x} - \ln x \le x + 3$ για κάθε $x \ge 1$.

---

13. Έστω f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2x}{x-2} = 3$ και f(3)=4.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x_0=2.

β) Αν η f είναι κυρτή στο $\mathfrak{R}$:

i) Να δείξετε ότι $f(x)-5x+6 \ge 0$ για κάθε $\in \mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2,3)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.

ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup\{-\infty,+\infty\}$ και **υπάρχει το** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup\{-\infty,+\infty\}$ και **υπάρχει το** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΣΧΟΛΙΑ

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.

2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{-x}}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\eta\mu x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{-x}+x-1}$

---

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+\ln x}{x+\ln x}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+2x+1}{4e^x+x+3}$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^3)}{\ln(2+x^2)}$.

---

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\ln x)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ iii) $\lim\limits_{x\to 0^+}[\ln x\cdot\ln(x+1)]$.

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln x}$ v) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x)^x$.

---

4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\varepsilon\varphi x}$ ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ iii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

---

5. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\alpha^2 f(x)-x^2 f(\alpha)}{x\text{-}\alpha}$ συναρτήσει των α, f(α), f΄(α).

i) αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α-δ,α+δ) με δ>0 και με συνεχή παράγωγο στο α.

ii) αν η f είναι παραγωγίσιμη στο α.

---

6. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-3f(x)+2f(x-h)}{h^2}=3f''(x)$.

---

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-1}{x}, & x\neq 0\\ \ln 2, & x=0\end{cases}$. Να δείξετε ότι $f'(0)=\dfrac{1}{2}\ln^2 2$.

---

8. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει (1-συνx)f(x) = ln(1+x)-x για κάθε x>-1. Να βρείτε την f(0).

---

9. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x)+e^{\eta\mu x}=f(x)\eta\mu x+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την f(0).

---

10. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(0)=\dfrac{3}{2}$ και f(0) =f΄(0) = 0.

Να αποδειχθεί ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{1-\sigma\upsilon\nu x}=3$.

---

11. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f΄΄(0) = 2 και f(0) =f΄(0) = 0.

i) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$

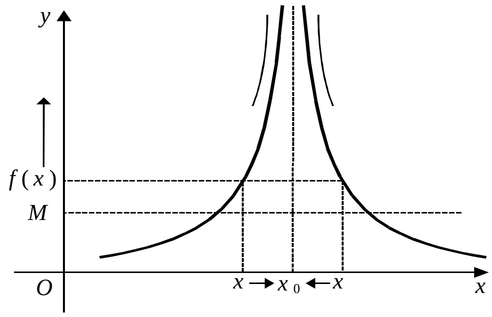
ii) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g:(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})\to\Re$ με $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Είναι η συνάρτηση g΄(x) συνεχής στο $x_0 = 0$;

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

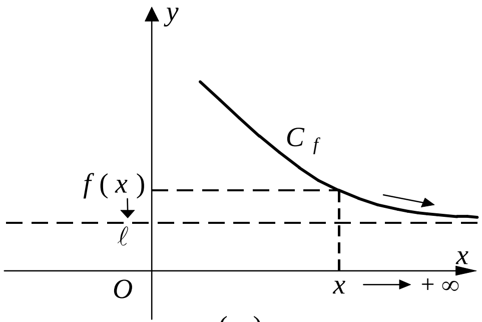
ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της *f*.



ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).



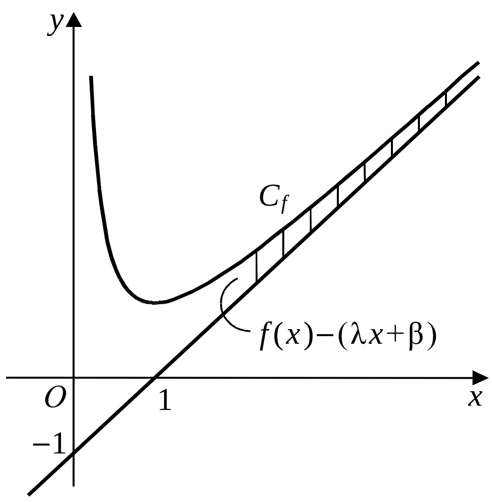
(a)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$,

αν $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$

αντιστοίχως : $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.



ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda = 0$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη.

ΘΕΩΡΗΜΑ **(Σημαντικό για την εύρεση των ασυμπτώτων)**

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, **αν και μόνο αν**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R},$$

αντιστοίχως:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}.$$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι:

— Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 **δεν έχουν ασύμπτωτες.**

— Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, **δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες**.

2. Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα **άκρα των διαστημάτων** του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f **δεν είναι συνεχής**.

— **Στο** $+\infty$**,** $-\infty$**,** εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, όταν:

i) $f(x)=\frac{2x\sqrt{x}}{x-3}$ ii) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+7}$ iii) $f(x)=\frac{3x^2+7x+5}{x-2}$.

---

2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-1}$ ii) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-2}$ iii) $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x^2}}$.

---

3. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{3x^2+(\alpha-2)x-2}{x+1}$

να έχει ασύμπτωτη την ευθεία ψ=3x-7.

---

4. Να προσδιοριστούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-\alpha x-\beta)=0$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2xe^{-\frac{1}{x}}-\alpha x+2\beta)=0$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{x}-\alpha x-\beta)=2$.

---

5. Αν η ευθεία ψ=3χ+4 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στο $+\infty$, να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mu f(x)+6x}{xf(x)-3x^2+5x+2} = 1.$$

---

6. Έστω οι συναρτήσεις f: $(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει g΄(x) = f ΄(x)-2 για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και οι C_f και C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία x=1. Αν η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον άξονα χ΄χ, να βρείτε στο $+\infty$ την ασύμπτωτη της C_g.

---

7. Έστω μια συνάρτηση f: $(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{-x} \le xf(x) \le 1$ για κάθε x>0. Να δείξετε ότι ο άξονας χ΄χ είναι ασύμπτωτη της C_f.

---

8. Έστω μια συνάρτηση f: $(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με f ΄΄(x) = $\frac{2}{x^3}$ για κάθε x >0. Αν η ευθεία ε: ψ = x-1 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f να βρείτε την f.

---

9. Έστω οι συναρτήσεις f,g: $(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με g(x) = f(x)+x+ln(x+1)-lnx για κάθε x>0. Αν η ευθεία ψ = x+3 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.