ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ – ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*.

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα της f στο *Δ*** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο *Δ* και ισχύει

$$\mathbf{F'(x) = f(x)}, \text{ για κάθε } x \in \Delta .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*.

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο *Δ*, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $\mathbf{G(x) = F(x) + c}$, $c \in R$, **είναι παράγουσες της *f* στο *Δ***

  και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο *Δ* παίρνει τη μορφή: $\mathbf{G(x) = F(x) + c}$, $c \in R$.

<u>Ιδιότητες παραγουσών</u>

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

i) Η συνάρτηση $F + G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f + g$ και

ii) Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf.

Βάσει των παραπάνω ιδιοτήτων όταν θέλουμε να βρούμε τις παράγουσες μιας συνάρτησης που εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων των οποίων γνωρίζουμε τις παράγουσες, βρίσκουμε τις παράγουσες του κάθε όρου ξεχωριστά και στη συνέχεια την παράγουσα της συνάρτησης όπως στο ***παράδειγμα.***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2+2e^x-3συνχ+2$, $x \in \mathbb{R}$.

Παράγουσες της συνάρτησης αυτής είναι οι συναρτήσεις:

$$F(x) = (\frac{x^3}{3} + c_1) + 2(e^x + c_2) - 3(\eta\mu x + c_3) + (2x + c_4) = \frac{x^3}{3} + 2e^x - 3\eta\mu x + 2x + c, \ c \in \mathbb{R},$$

όπου το c έχει προκύψει από την σύμπτυξη των σταθερών c_1, c_2, c_3, c_4.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΚΑΠΟΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ
1	$f(x) = 0$	$F(x) = c$
2	$f(x) = 1$	$F(x) = x + c$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$ με $x \neq 0$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + c$
	$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ με $g(x) \neq 0$	$F(x) = \ln\lvert g(x)\rvert + c$
4	$f(x) = x^{\alpha}$, με $\alpha \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
5	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, με $x > 0$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
	$f(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}$ με $g(x) > 0$	$F(x) = 2\sqrt{g(x)} + c$
6	$f(x) = συνx$	$F(x) = ημx + c$
	$f(x) = συν(αx+β)$ με $α \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a}\,ημ(αx+β) + c$
7	$f(x) = ημx$	$F(x) = -συνx + c$
	$f(x) = ημ(αx+β)$ με $α \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{a}\,συν(αx+β) + c$
8	$f(x) = \frac{1}{συν^2 x}$	$F(x) = εφx + c$
9	$f(x) = \frac{1}{ημ^2 x}$	$F(x) = -σφx + c$
10	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
	$f(x) = e^{αx+β}$ με $α \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{α}e^{αx+β} + c$
11	$f(x) = a^x$ με $0 < a \neq 1$	$F(x) = \frac{α^x}{\ln a} + c$

ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

1) *Αν ο βαθμός του P(x) είναι μικρότερος από τον βαθμό του Q(x)*

i) *εξετάζουμε αν f(x) είναι της μορφής* $f(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ οπότε θα έχει παράγουσες τις συναρτήσεις: $F(x)=\ln|g(x)|+c$.

Παράδειγμα:

Αν $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+10}$ τότε $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2}{x^2+2x+10}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+2x+10)'}{x^2+2x+10}$ οπότε θα έχει παράγουσες τις συναρτήσεις: $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln|x^2+2x+10|+c$.

ii) Το Q(x) έχει την μορφή $Q(x)=\alpha(x-\rho_1)^{\kappa}\cdot(x-\rho_2)^{\lambda}\ldots(x-\rho_\nu)^{\mu}$, τότε το κλάσμα γράφεται :

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-\rho_1)}+\frac{A_2}{(x-\rho_1)^2}+\cdots+\frac{A_\kappa}{(x-\rho_1)^\kappa}+\frac{B_1}{(x-\rho_2)}+\frac{B_2}{(x-\rho_2)^2}+\cdots+\frac{B_\lambda}{(x-\rho_2)^\lambda}+\ldots+$$

$$\frac{K_1}{(x-\rho_\nu)}+\frac{K_2}{(x-\rho_\nu)^2}+\cdots+\frac{K_\mu}{(x-\rho_\nu)^\mu}.$$

Το κλάσμα τότε μετατρέπεται σε άθροισμα κλασμάτων των οποίων οι παράγουσες υπολογίζονται όπως στο ***παράδειγμα:***

Αν $f(x)=\dfrac{3x^2-33x+92}{(x-5)^2(x-7)}$ τότε:

$\dfrac{3x^2-33x+92}{(x-5)^2(x-7)}=\dfrac{A}{x-5}+\dfrac{B}{(x-5)^2}+\dfrac{\Gamma}{(x-7)}$, οπότε με απαλοιφή των παρανομαστών έχουμε:

$3x^2-33x+92=A(x-5)(x-7)+B(x-7)+\Gamma(x-5)^2$ οπότε προκύπτει μετά τις πράξεις ότι:

$A=1$, $B=-1$, $\Gamma=2$ και επομένως το κλάσμα γράφεται:

$\dfrac{3x^2-33x+92}{(x-5)^2(x-7)}=\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{(x-5)^2}+\dfrac{2}{(x-7)}$ και η συνάρτηση γίνεται:

$f(x)=\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{(x-5)^2}+\dfrac{2}{(x-7)}=\dfrac{(x-5)'}{(x-5)}-(x-5)^{-2}+2\dfrac{(x-7)'}{(x-7)}$, οπότε θα έχει παράγουσες

τις συναρτήσεις: $F(x)=\ln|x-5|+(x-5)^{-1}+2\ln|x-7|+c$.

2) ***Αν ο βαθμός του P(x) είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό του Q(x)*** τότε κάνουμε την διαίρεση P(x):Q(x) και αν π(x) είναι το πηλίκο και υ(x) το υπόλοιπο της διαίρεσης, γράφουμε:

f(x)= $\frac{P(x)}{Q(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{Q(x)}$, οπότε υπολογίζουμε τις παράγουσες των π(χ) και $\frac{\upsilon(x)}{Q(x)}$.

Οι παράγουσες της φ(χ)=$\frac{\upsilon(x)}{Q(x)}$ υπολογίζονται όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

<u>Παράδειγμα:</u>

Αν f(x)=$\frac{2x^2-5x+7}{x-3}$

Διαιρούμε το $2x^2$-5x+7 με το x-3 και βρίσκουμε πηλίκο 2x+1 και υπόλοιπο 10, οπότε:

f(x)= $\frac{2x^2-5x+7}{x-3} = 2x+1+\frac{10}{x-3}$ = $2x+1+10\frac{(x-3)'}{x-3}$ και επομένως θα έχει παράγουσες τις συναρτήσεις: $F(x) = x^2 + x + 10\ln|x-3|$ +c.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ

1. Να βρεθούν οι παράγουσες των συναρτήσεων :

i) $f(x)=\alpha x+\alpha$ ii) $f(x)= x\omega^2$

iii) $f(\omega)=x\omega^2$ iv) $f(t)= x\omega^2$

v) $f(\omega)= -1$ vi) $f(\alpha)= \alpha x+\alpha$

---

2. Να βρεθούν οι παράγουσες των συναρτήσεων :

i) $f(x) = x^2+2\eta\mu x-3$ ii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 3e^x + 2^x$ iii) $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x} - x + 1}{x^2}$

iv) $f(x) = \dfrac{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2}{\eta\mu^2 x}$ v) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}}$ vi) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

---

3. Να βρεθούν οι παράγουσες των συναρτήσεων :

i) $f(x) = 5e^{3x-2}$ ii) $f(x) = \dfrac{5}{2-3x}$ iii) $f(x) = \sigma\upsilon\nu(\dfrac{x}{3}+5)$

iv) $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(5x-1)}$ v) $f(x) = e^{2x+3}+\sigma\upsilon\nu 3x$ vi) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

---

4. Να βρεθούν οι παράγουσες των συναρτήσεων :

i) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$ ii) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-x-12}$ iii) $f(x) = \dfrac{6x+5}{9x^2-4}$

iv) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+x}$ v) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x}$. vi) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

---

5. Να βρείτε τις αρχικές της συνάρτησης $f(x) = 3|x| -2,\ x \in \mathbb{R}$.

---

6. Να βρείτε τις αρχικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ της f με $f(x)=\begin{cases} x + \eta\mu x, & \alpha\nu\ x \le 0 \\ e^x - 1, & \alpha\nu\ x > 0 \end{cases}$.

---

7. Να βρείτε τις αρχικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ της f με $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & \alpha\nu\ x \ge 0 \\ \sigma\upsilon\nu 2x, & \alpha\nu\ x<0 \end{cases}$.

---

8. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f'(x)+2xf(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$

---

9. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν η εφαπτομένη της C_f έχει σε κάθε σημείο της συντελεστή διεύθυνσης τετραπλάσιο από την τετμημένη του σημείου και $f(1)= 6$.

---

10. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $f'(x^2) = x$, $f(0) = 0$ και η f είναι άρτια.

---

11. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, αν ισχύει:

(i) $f'(x)$ συνx + $f(x)$ ημx = συν^{3}x και $f(0) = 3$.

(ii) $f(x)$ ημx - $f'(x)$ συνx = $1-2x$ και $f(0) = 1$.

---

12. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ αν για κάθε $x\neq 0$ ισχύει: $f'(\frac{1}{x}) = x-1$

και $f(-1) = f(1) = 0$.

---

13. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = 2\frac{xf(x)}{x^2+1}, \quad x\in\Re \qquad \text{και} \qquad f(1) = 6.$$

(i) Να βρείτε τον τύπο της f.

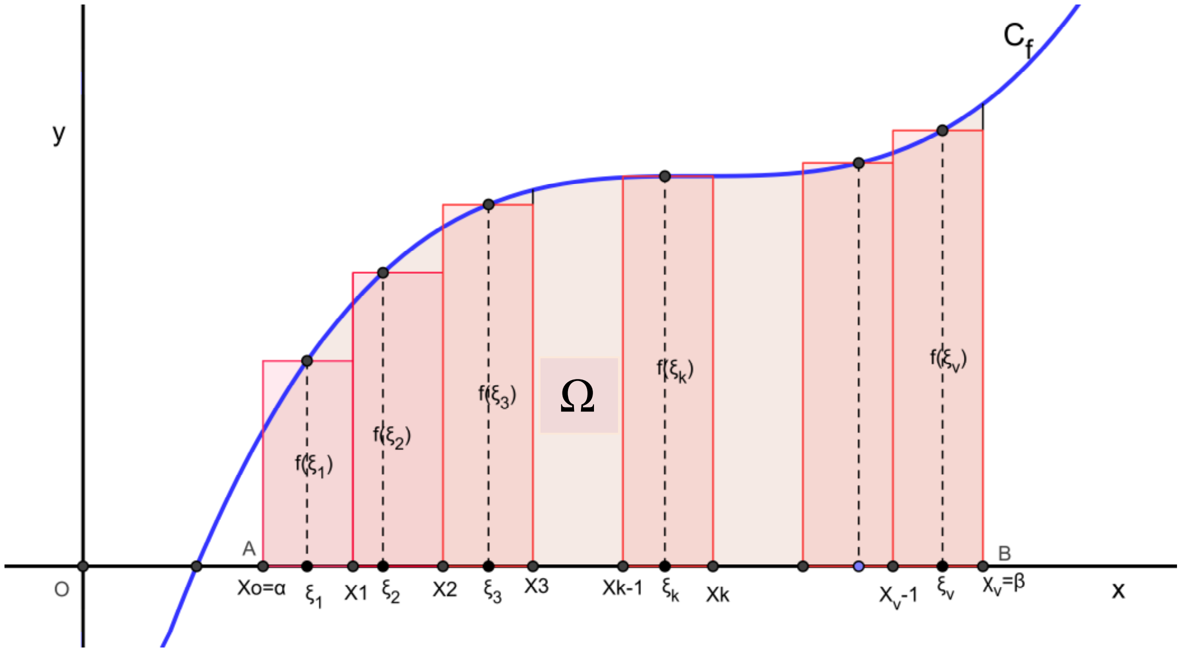
(ii) Να βρείτε την αρχική συνάρτηση της $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^3+3x+1}}$, $x>0$.

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός εμβαδού

Έστω f **μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα** $[\alpha,\beta]$, με $f(x)\geq 0$ **για κάθε** $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω (Σχ. 1) εργαζόμαστε ως εξής:



• Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu=\beta$.

• Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1},x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$.

Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

$$S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\cdots+f(\xi_\nu)\Delta x=[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_\nu)]\Delta x\ .$$

Δηλαδή $S_\nu=\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$.

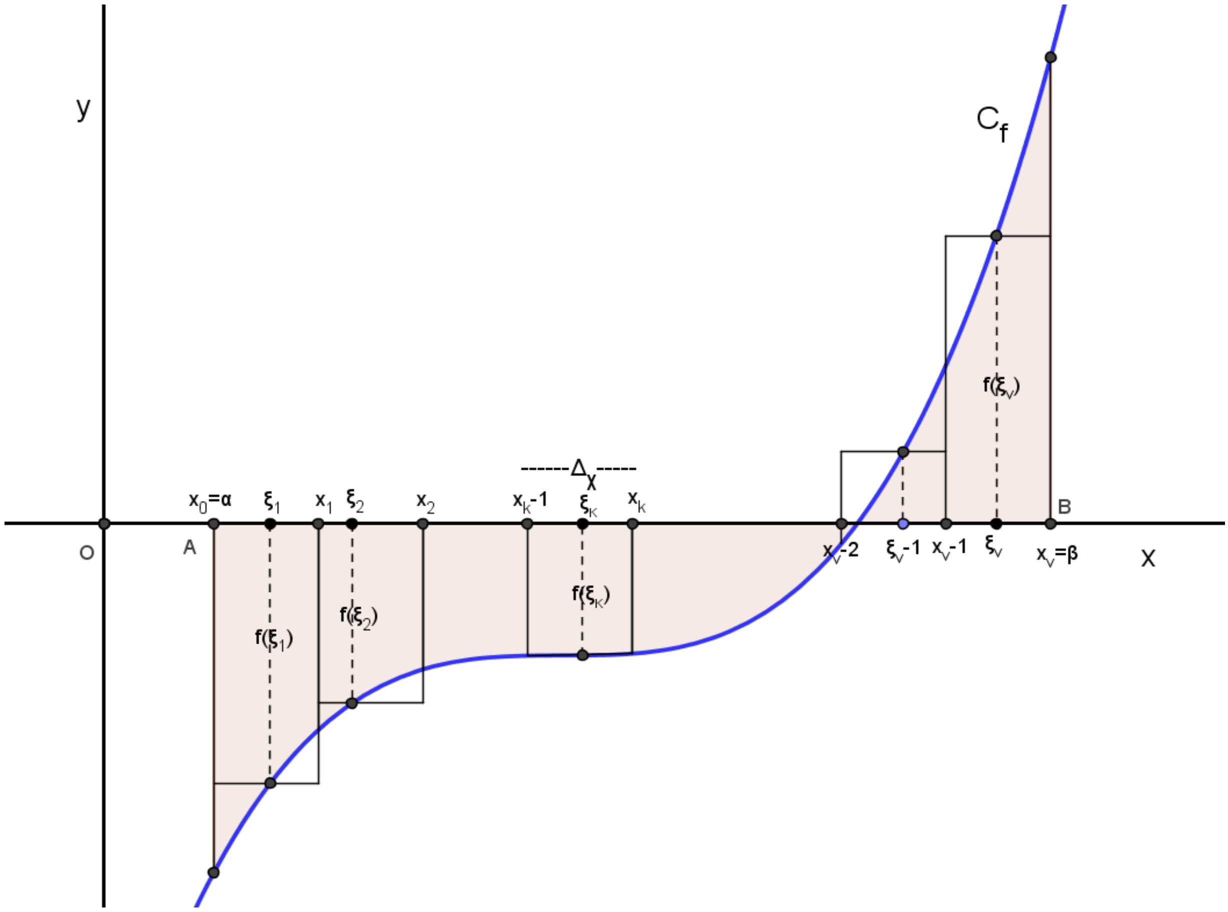
Αποδεικνύεται ότι: ***το*** $\lim_{\nu\to\infty}S_\nu$ ***υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων*** ξ_κ.

Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega)\geq 0$.

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω μια συνάρτηση ***f* σ υ ν ε χ ή ς** **στο [α,β].**

Με τα σημεία $\mathbf{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta}$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\mathbf{\Delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1,2,\ldots,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\mathbf{S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

Αποδεικνύεται ότι:

“Το όριο του αθροίσματος S_ν***, δηλαδή το*** $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ ***υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων*** ξ_κ***”.***

Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται ***“ολοκλήρωμα της f από το α στο β”***. Δηλαδή,

$$\boxed{\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

- Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης.

- Στην έκφραση $\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx}$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα.

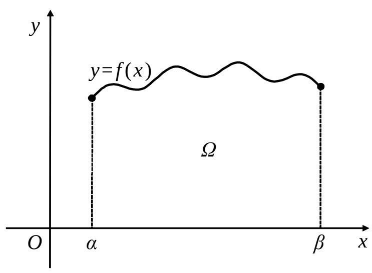
  Έτσι, οι εκφράσεις $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι **πραγματικός αριθμός**.

- Επεκτείνεται ο ορισμός και για τις περιπτώσεις που είναι $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, ως εξής:

  - $\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx} = -\int_\beta^\alpha \mathbf{f(x)dx}$
  - $\int_\alpha^\alpha \mathbf{f(x)dx} = \mathbf{0}$

- Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν $\mathbf{f(x) \geq 0}$ για κάθε $\mathbf{x \in [\alpha,\beta]}$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx}$ δίνει το εμβαδόν $\mathbf{E(\Omega)}$ του χωρίου *Ω* που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της *f* τον άξονα $\mathbf{x'x}$ και τις ευθείες $\mathbf{x = \alpha}$ και $\mathbf{x = \beta}$ (βλ. σχήμα).



Δηλαδή, $\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)$.

Επομένως,

Αν $\mathbf{f(x) \geq 0}$, τότε $\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx \geq 0}$.

Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g ***σ υ ν ε χ ε ί ς*** συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_\alpha^\beta \mathbf{\lambda f(x)dx} = \lambda \int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx}$
- $\int_\alpha^\beta \mathbf{[f(x)+g(x)]dx} = \int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx} + \int_\alpha^\beta \mathbf{g(x)dx}$ και γενικά:
- $\int_\alpha^\beta \mathbf{[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx} = \lambda \int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx} + \mu \int_\alpha^\beta \mathbf{g(x)dx}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι ***σ υ ν ε χ ή ς*** σε διάστημα *Δ* και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Βάσει του παραπάνω θεωρήματος αν η συνάρτηση f για παράδειγμα είναι συνεχής στο διάστημα [2,5] θα ισχύει ότι: $\int_{3}^{4} f(x)dx = \int_{3}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια ***σ υ ν ε χ ή ς*** συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $\mathbf{f(x) \geq 0}$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f **δεν είναι παντού μηδέν** στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0.$$

Παράδειγμα: $\int_{1}^{3} (x-2)^2 dx > 0$ επειδή $(\chi\text{-}2)^2 \geq 0$ για $x \in [1,3]$ και δεν είναι παντού 0.

Εφαρμογή

Για οποιοδήποτε $c \in \mathbb{R}$ ισχύει : $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta - \alpha)$.

Παράδειγμα: $\int_{1}^{4} 5dx = 5 \cdot (4-1) = 15$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ *για* την οποία ισχύει:

$$2\int_{-4}^{\kappa} \frac{x^2}{3x^2+12}dx - \int_{\kappa}^{-4} \frac{8}{3x^2+12}dx = 1.$$

---

2. Αν 3<α<β, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-3x)dx \geq 0.$

---

3. Να αποδείξετε ότι: $\int_{2}^{5}\frac{1}{x^2+1}dx \leq \int_{2}^{5}\frac{x}{10}dx$.

---

4. Να αποδείξετε ότι αν 0<α<β, τότε: $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(x+\frac{1}{x})dx \geq \beta-\alpha.$

---

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1,5], να αποδείξετε ότι:

$$1+\int_{1}^{5}f^2(x)dx \geq \int_{1}^{5}|f(x)|dx.$$

---

6. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$**,** να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\gamma}^{\delta}f(t)g(x)dx\right)dt = \int_{\gamma}^{\delta}\left(\int_{\alpha}^{\beta}f(t)g(x)dt\right)dx.$$

---

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx = \int_{\gamma}^{\delta}f(x)dx,$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\gamma}f(x)dx = \int_{\beta}^{\delta}f(x)dx.$$

---

8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$**.** Να αποδείξετε ότι:

(i) $\int_{-1}^{9}f(x)dx \geq \int_{0}^{8}f(x)dx$ (ii) $\int_{3}^{1}f(x)dx \leq \int_{2}^{1}f(x)dx.$

---

9. i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=e^{x^2-x}, x\in[0.2]$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_{0}^{2}e^{x^2-x}dx \leq 2e^2.$

---

10. i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\ln x}, & \text{αν } 0<x\le \dfrac{1}{e} \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $-\dfrac{1}{e}\le \int_0^{\frac{1}{e}} f(x)dx \le 0$.

---

11. Να αποδείξετε ότι: $1-e\le \int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 e^{1-x^2}dx\le e-1$.

---

12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [1,4] και $f(x)\le 6$ στο [1,4], να αποδείξετε ότι: $\int_1^4 2^{\sqrt{x}} f(x)dx\le 72$.

---

13. i) Αν $\alpha<\beta<0$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx\le \alpha\text{-}\beta$.

ii) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$ και f(x)< 0 για κάθε x,να αποδείξετε ότι $\int_3^1 \left(\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{x}{f(x)}\right)dx\ge 4$.

---

14. i) Αν $A=\int_1^5 \dfrac{e^x}{e^x+x^2}dx$ και $B=\int_1^5 \dfrac{x^2}{e^x+x^2}dx$, να υπολογίσετε το άθροισμα Α+Β.

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_1^5 \dfrac{e^x}{e^x+x^2}dx \cdot \int_1^5 \dfrac{x^2}{e^x+x^2}dx\le 4$.

---

15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [3,4] με $1\le f(x)\le 2$ για κάθε $x\in[3,4]$ και $\int_3^4 f^2(x)dx\ge 4$, να αποδείξετε ότι $\int_3^4 f(x)dx=2$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$ τότε η συνάρτηση

$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο Δ με $F'(x)=f(x)$.

(Είναι δηλαδή η F μια ***παράγουσα*** της f).

Παράδειγμα 1

Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_{3}^{x} \sqrt{t}\,dt$.

Η συνάρτηση $f(t)=\sqrt{t}$ είναι συνεχής στο $D_f=[0,+\infty)$. ***Το 3*** $\in[0,+\infty)$ ***και θα πρέπει επίσης το x να ανήκει σ' αυτό***, οπότε $D_F=[0,\infty)$ και $F'(x) = f(x)= \sqrt{x}$ με $x\in[0,+\infty)$.

Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_{3}^{x} \sqrt{t^2-1}\,dt$.

Η συνάρτηση $f(t)=\sqrt{t^2-1}$ είναι συνεχής στο $D_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Επειδή το 3 $\in[1,+\infty)$ ***θα πρέπει επίσης το x να ανήκει σ' αυτό***, οπότε $D_F=[1,\infty)$ και

$F'(x) = f(x)= \sqrt{x^2-1}$ με $x\in$ **[1,+∞)**.

ΘΕΩΡΗΜΑ **(Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)**

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha) = \left[G(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$$

Παρατηρήσεις

Α. Το x διατρέχει το διάστημα Δ και είναι η ***μεταβλητή της συνάρτησης F*** ενώ το t είναι η ***μεταβλητή ολοκλήρωσης*** και για το ολοκλήρωμα κάθε άλλο γράμμα ακόμα και το x θεωρείται σταθερά.

Έτσι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_{3}^{x} x\cdot \eta\mu t\,dt$, αυτή γράφεται $F(x)=x\cdot\int_{3}^{x} \eta\mu t\,dt$ και

επειδή η συνάρτηση f(t)=ημt είναι συνεχής στο D_f=R η συνάρτηση F(x) είναι παραγωγίσιμη σαν γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων και ισχύει :

$$F'(x)=(x)'\cdot\int_{3}^{x}\eta\mu t\,dt + x\cdot\left(\int_{3}^{x}\eta\mu t\,dt\right)' = \int_{3}^{x}\eta\mu t\,dt + x\cdot\eta\mu x\,.$$

Β. Συνάρτηση **φ(x)** = $\displaystyle\int_{\alpha}^{g(x)} \mathbf{f(t)\,dt}$ όπου f(t) συνεχής στο Δ και g(x) παραγωγίσιμη.

Η συνάρτηση **φ(χ)**= $\displaystyle\int_{\alpha}^{g(x)} \mathbf{f(t)\,dt}$ = **F(g(x))** με F(x)= $\displaystyle\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ και D_F=Δ (διάστημα)

— έχει πεδίο ορισμού $\mathbf{D_\varphi = D_{Fog} = \{x \in D_g : g(x) \in \Delta\}}$ και

— είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με

φ΄(x)= (Fog)΄(x)=F΄(g(x)) g΄(x)=f(g(x)) g΄(x).

Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{\varphi(x)=\int_3^{5x+2}\sqrt{t^2-1}\,dt.}$

i) **Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της φ.**

ii) **Να βρεθεί η συνάρτηση φ΄(x).**

Λύση

Έστω η συνάρτηση F(x)= $\displaystyle\int_3^{x} \mathbf{f(t)dt}$ με f(t)= $\sqrt{t^2-1}$

Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = (-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής σ' αυτό.

Επειδή το 3 $\in[1,+\infty)$ ***θα πρέπει επίσης το x να ανήκει σ' αυτό***, οπότε $D_F=[1,\infty)$

και F΄(x) = f(x).

Τότε φ(x)= $\int_3^{5x+2}\sqrt{t^2-1}\,dt.$ = **F(g(x))** με g(x)=5x+2 και D_g=R.

$D_\varphi = D_{Fog} = \{x\in D_g : g(x)\in D_F\} = \{x\in R : 5x+2\geq 1\} = \{x \in R : x\geq -\frac{1}{5}\}$

Άρα $\mathbf{D_\varphi=[-\frac{1}{5},+\infty)}$ **και η φ(x) είναι παραγωγίσιμη** σαν σύνθεση παραγωγισίμων

συναρτήσεων με φ΄(χ)=F΄(g(x)) g΄(x)=f(g(x)) g΄(x)= $\sqrt{(5x+2)^2-1}$ (5x+2)΄.

Επομένως **φ΄(χ)= 5** $\mathbf{\sqrt{(5x+2)^2-1}}$ **,**για κάθε $\mathbf{x\in[-\frac{1}{5},+\infty)}$.

Γ. Συνάρτηση **φ(x)** = $\displaystyle\int_{h(x)}^{g(x)} \mathbf{f(t)\,dt}$ όπου **f(t) συνεχής στο Δ** και **g(x), h(x) παραγωγίσιμες**.

α) Εύρεση του πεδίου ορισμού της φ(x).

Βρίσκουμε το σύνολο Δ στο οποίο η f είναι ορισμένη και συνεχής.

Μετά βρίσκουμε τα D_g και D_h .

Ένας πραγματικός αριθμός x ανήκει στο $\boldsymbol{D_\varphi}$ *αν και μόνο αν* ***ανήκει στο*** $\boldsymbol{D_g \cap D_h}$ ***και η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα τους αριθμούς g(x) και h(x).***

β) Παραγώγιση της φ(x)

1ος τρόπος

Θεωρώ $\alpha\in\Delta$ τότε για κάθε $x\in D_\varphi$ για τα οποία g(x) και h(x) είναι παραγωγίσιμες θα ισχύει:

$$\varphi(x)=\int_{h(x)}^{\alpha} f(t)\,dt+\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt=-\int_{\alpha}^{h(x)} f(t)\,dt+\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt \text{ και επομένως:}$$

$$\varphi'(x)=-f(h(x))\cdot h'(x)+f(g(x))\cdot g'(x).$$

2ος τρόπος

Έστω ότι G είναι μία παράγουσα της f στο Δ. Τότε $G'(t)=f(t)$, $\forall t\in\Delta$. Από το **Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού προκύπτει ότι:**

$$\varphi(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt=G(g(x))-G(h(x)) \quad \text{και επομένως :}$$

$$\varphi'(x)=G'(g(x))\cdot g'(x)-G'(h(x))\cdot h'(x)$$

Άρα $\varphi'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)-f(h(x))\cdot h'(x).$

Παράδειγμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=\int_{x-1}^{\sqrt{x+5}}\frac{1}{t}\,dt.$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της φ. **β) Να βρεθεί η συνάρτηση φ΄(x).**

Λύση

α) Εύρεση του πεδίου ορισμού της φ(x)

Η συνάρτηση $f(t)=\frac{1}{t}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $\Delta=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση $h(x)=x-1$ έχει $D_h=R$ και η $g(x)=\sqrt{x+5}$ το $D_g=[-5,+\infty)$ οπότε

$D_g\cap D_h=[-5,+\infty)$.

$D_\varphi=\{x\in D_g\cap D_h \,/\,$ η $f(t)=\frac{1}{t}$ να είναι συνεχής στο διάστημα με άκρα $x-1$ και $\sqrt{x+5}\}$

Άρα θα πρέπει : $\begin{cases} x\in[-5,+\infty) \\ \sqrt{x+5}>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1.$ Οπότε: $D_\varphi=(1,+\infty)$.

β) Εύρεση της φ΄(x)

1ος τρόπος

$$\varphi(x)=\int_{x-1}^{\alpha} f(t)\,dt+\int_{\alpha}^{\sqrt{x+5}} f(t)\,dt=-\int_{\alpha}^{x-1} f(t)\,dt+\int_{\alpha}^{\sqrt{x+5}} f(t)\,dt \text{ και επομένως:}$$

$$\varphi'(x)=-f(x-1)\cdot(x-1)'+f(\sqrt{x+5})\cdot(\sqrt{x+5})'=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x+5}}\frac{1}{2\sqrt{x+5}}=$$

$$-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2(x+5)}.$$

2ος τρόπος

Έστω η συνάρτηση ***G(t)*** μία παράγουσα της ***f*** στο Δ. Τότε ***G′(t)=f(t),*** $\forall t\in\Delta$.
Από το Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού προκύπτει ότι:

$\varphi(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = G(g(x))-G(h(x))$ και επομένως :

$\varphi'(x)= G'(g(x))\cdot g'(x)-G'(h(x))\cdot h'(x) = f(g(x))\cdot g'(x) - f(h(x))\cdot h'(x)$ δηλαδή

$\varphi'(x) = f(\sqrt{x+5})\cdot(\sqrt{x+5})' - f(\chi-1))\cdot(\chi-1)' = \frac{1}{\sqrt{x+5}}\frac{1}{2\sqrt{x+5}} - \frac{1}{x-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2(x+5)}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x-1}}$.

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

• Ο τύπος της **ολοκλήρωσης κατά παράγοντες** για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx,$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

Παράδειγμα

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)'dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (e-0) - \left[e^x\right]_0^1 = e-(e-1)=1$$

• Ο τύπος **ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής** για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις,

$\mathbf{u = g(x)}$, $\mathbf{du = g'(x)dx}$ και

x	α	β
u	$u_1 = g(\alpha)$	$u_2 = g(\beta)$

Παράδειγμα

I= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x dx$ **=;** Θέτω **u=ημx** οπότε **du=συνx dx** και

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

Οπότε **I=** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^1 e^u du = \left[e^u\right]_0^1 = e-1$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1) *Ολοκληρώματα των μορφών* **I=** $\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{P}(x)\cdot \eta\mu(\kappa x+\lambda)\,dx$, I= $\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{P}(x)\cdot \sigma\upsilon\nu(\kappa x+\lambda)\,dx$,

όπου κ≠0 και P(x) πολυωνυμική συνάρτηση υπολογίζονται με παραγοντική ολοκλήρωση, αφού πρώτα βρούμε μια παράγουσα της ημ(κx+λ), συν(κx+λ) αντίστοιχα.

2) *Ολοκληρώματα της μορφής* **I=** $\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{P}(x)\cdot e^{\kappa x+\lambda}dx$ *όπου κ≠0 και P(x) πολυωνυμική συνάρτηση υπολογίζονται με παραγοντική ολοκλήρωση, αφού πρώτα βρούμε μια παράγουσα της* $e^{\kappa x+\lambda}$.

3) *Ολοκληρώματα της μορφής* **I=** $\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{P}(x)\cdot ln(g(x))\,dx$ *όπου P(x) πολυωνυμική συνάρτηση υπολογίζονται με παραγοντική ολοκλήρωση, αφού πρώτα βρούμε μια παράγουσα της P(x).*

4) *Ολοκληρώματα των μορφών* **I=** $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\alpha x+\beta}\cdot \eta\mu(\kappa x+\lambda)\,dx$ **,** **I=** $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\alpha x+\beta}\cdot \sigma\upsilon\nu(\kappa x+\lambda)\,dx$

όπου α, κ≠0 υπολογίζονται με παραγοντική ολοκλήρωση, αφού πρώτα βρούμε μια παράγουσα της $e^{\alpha x+\beta}$ *ή μια παράγουσα της ημ(κx+λ), συν(κx+λ) αντίστοιχα. Το αρχικό ολοκλήρωμα στην πορεία μετά από δύο παραγοντικές επανεμφανίζεται, οπότε και το υπολογίζουμε.*

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1). *Ολοκληρώματα των μορφών*

I= $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu\kappa x \cdot \sigma\upsilon\nu\lambda x\, dx$, I= $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu\kappa x \cdot \sigma\upsilon\nu\lambda x\, dx$, I= $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu\kappa x \cdot \eta\mu\lambda x\, dx$, *υπολογίζονται με μετατροπή του γινομένου σε άθροισμα με τους τύπους.*

2ημα·συνβ=ημ(α+β)+ημ(α-β)

2συνα·συνβ=συν(α-β)+συν(α+β)

2ημα·ημβ=συν(α-β)-συν(α+β)

Παράδειγμα:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma\upsilon\nu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 5x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu 8x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\eta\mu 2x + \frac{1}{8}\eta\mu 8x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 0\right) - 0\right] = \frac{1}{4}.$$

2) *Ολοκληρώματα αρτίων δυνάμεων ημχ, συνχ* *υπολογίζονται με χρήση των τύπων αποτετραγωνισμού* ***ημ²α=***$\mathbf{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$***, συν² α=***$\mathbf{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$ *όπως στο παράδειγμα:*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma\upsilon\nu 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\eta\mu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\left(\eta\mu\frac{\pi}{2} - \eta\mu 0\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}.$$

3) *Ολοκληρώματα περιττών δυνάμεων ημχ, συνχ* *υπολογίζονται με αντικατάσταση όπως στο παράδειγμα:*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)\cdot \eta\mu x\, dx = ;$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

Θέτω u=συνx, οπότε du=-ημx dx και το I γράφεται:

$$I = -\int_1^0 (1-u^2)\, du = \int_0^1 (1-u^2)\, du = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}.$$

Γενικότερα : *Ολοκληρώματα της μορφής* $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu^{\mu} x \cdot \sigma\upsilon\nu^{\nu} x\, dx$, *όπου μ,ν ρητοί αριθμοί.*

i) *Τουλάχιστον ένας από τους μ,ν είναι περιττός ακέραιος.*

— Αν το ν είναι περιττός ,θέτουμε u=ημx

— Αν το μ είναι περιττός ,θέτουμε u=συνx

Παράδειγμα:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot (1-\sigma\upsilon\nu^2 x)\cdot \eta\mu x\, dx =$$

Θέτω u=συνx οπότε du=-ημx dx και το $I=-\int_1^{\frac{1}{2}} u^2 \cdot (1-u^2)\cdot du =$

x	0	$\frac{\pi}{3}$
u	1	$\frac{1}{2}$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} u^2 \cdot (1-u^2)\cdot du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} u^2 - u^4\, du = \left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{3}-\frac{1}{160} = \ldots..$$

ii) ***Αν μ,ν είναι άρτιοι θετικοί.*** Τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους.

$$\mathbf{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 2x}\ , \qquad \mathbf{\eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\, 2x}{2}}, \qquad \mathbf{\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu\, 2x}{2}}$$

Παράδειγμα:

$$I=\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \eta\mu^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{1-\sigma\upsilon\nu 4x}{2} dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{8} dx - \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu 4x dx =$$

$$=\frac{1}{8}(\pi-0)-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\eta\mu 4x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{32}(\eta\mu 4\pi - \eta\mu 0) = \frac{\pi}{8}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $F(x)=\int_1^{3-x}\sqrt{t-1}\,dt$ ii) $F(x)=\int_0^{x}\frac{\eta\mu t}{t^2-1}dt$ iii) $F(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\sqrt{9-t^2}\,dt$.

---

2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $F(x)=\int_x^{\eta\mu x}e^{t^2}dt$ ii) $F(x)=\int_{5-x}^{\ln x}\sqrt{t-1}\,dt$ iii) $F(x)=\int_{\frac{1}{x-1}}^{x-2}e^t\ln|t|\,dt$.

---

3. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=\int_2^x\left(\int_2^t\sqrt{\omega^2-4}\,d\omega\right)dt$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της φ.

β) Να δείξετε ότι είναι γνησίως μονότονη και κυρτή.

---

4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, δείξτε ότι και η συνάρτηση $F(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο R.

---

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και θετική στο R, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\int_0^x(x-t)\,f(t)\,dt$, x∈R, είναι κυρτή στο R.

---

6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

i) $\int_4^5\frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx$ ii) $\int_0^5\left|x^2-5x+6\right|dx$ iii) $\int_{-2}^2(|x|+|x-1|)dx$.

---

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

i) $I=\int_{-1}^1 f(x)dx$, όπου $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 0\\ 3x^2-1, & x>0\end{cases}$

ii) $I=\int_{-2}^1 f(x)dx$, όπου $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}, & x\ge 0\\ x^3, & x<0\end{cases}$

---

8. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x dx$ ii) $\int_0^1 x^2 e^x dx$ iii) $\int_1^e x\ln x dx$

iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \eta\mu x dx$ v) $\int_0^1 x e^{-2x} dx$ vi) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$

vii) $\int_0^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx$ viii) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

---

9. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

i) $\int_0^2 \frac{x}{x^2+4} dx$ ii) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+1} dx$ iii) $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu^3 x dx$

iv) $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx$ v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}\, dx$ vi) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sqrt{\varepsilon\varphi x}} dx$

---

10. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{\eta\mu x}.\sigma\upsilon\nu x\, dx$ ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi^2 x+\varepsilon\varphi^3 x)\, dx$ iii) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln^3 x} dx$

iv) $\int_1^2 x^2 e^{x^3+4} dx$ v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{1+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x} dx$ vi) $\int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx$

vii) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} dx$ viii) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x} dx$ ix) $\int_0^1 \eta\mu\sqrt{x+2}\, dx$

---

11. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

i) $\int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2} dx$ ii) $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$ iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4 x} dx$

---

12. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0,1].

Δείξτε ότι υπάρχει ξ∈(0,1)ώστε: $\int_0^1 x f''(x)dx = f'(1) - f'(\xi)$.

---

13. Βρείτε συνάρτηση f συνεχή στο [0,+∞), αν για κάθε x∈[0,+∞) ισχύει:

$$x+\int_0^x f(t)dt=(x+1)f(x).$$

---

14. Βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}\int_2^x(\sqrt{t^2+5}-3)dt$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\int_1^x \dfrac{\ln t}{(x-1)^2}dt$ iii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\int_0^{\frac{1}{x}} xe^{t^2}dt$

---

15. Να βρείτε τα πεδία ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x+\int_1^x \text{τημ}(x-t)dt$ ii) $f(x)=x^2+x\int_1^e \ln(xt)dt$ iii) $f(x)=e^x+x\int_1^x \eta\mu\dfrac{x}{t}dt$.

---

16. Να βρείτε τα πεδία ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $F(x)=\int_\alpha^\beta f(x-t)dt$ ii) $F(x)=x^2\int_0^1 t\cdot f(tx)dt$. (f είναι συνεχής στο R).

---

17. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις f σε κάθε περίπτωση:

α) f/[0,+∞) και $\int_0^1 f(tx)dt=\dfrac{1}{4}f(x)$, ∀x∈(0,+∞) και f(1)=1.

β) f/(0,+∞) και $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2}+\int_x^{x^2}\dfrac{2}{t}f\left(\dfrac{t}{x}\right)dt$, ∀ x>0.

α) f/ℝ και $f(x)=3\alpha x^2+\alpha\int_0^{\frac{x}{\alpha}} e^{-\alpha t}f(x-\alpha t)dt$ με *α>0* .

---

18. Έστω $f(t)=\int_2^t \dfrac{1}{\ln u}du$, $F(x)=\int_3^x f(t)dt$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και της F.

β) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

---

19. Έστω f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με f(x)>0 για κάθε $x \neq 0$ και F(x)=$\int_1^x f(t)dt$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F.

β) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της F.

γ) Αν G(x)=$\int_2^x \left(\int_1^t f(u)du \right) dt$, να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η G και να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακρότατων της.

---

20. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I=\int_0^1 \left(\int_1^x \sigma\upsilon\nu\, t^2 dt \right) dx, \qquad J=\int_0^1 \left(\int_1^x \frac{3x^2}{1+t^2} dt \right) dx .$$

---

21. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\int_0^1 f(xt)dt = \frac{1}{2} f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Αν f(1)=1, να αποδείξετε ότι f(x)=x, $x \in \mathbb{R}$.

---

22. Αν η συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $1+\int_0^x f(t)dt \leq e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι f(0)=1.

---

23. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $\int_x^{x^3} f(t)dt \leq x^3 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι f(-1)=f(0)=f(1).

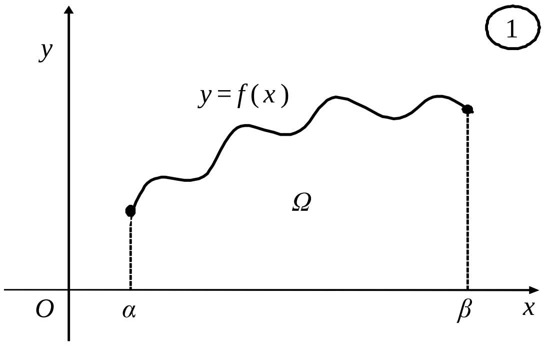
β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ ώστε η εφαπτόμενη στη C_f στα σημεία $M(\xi_1, f(\xi_1))$ και $N(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

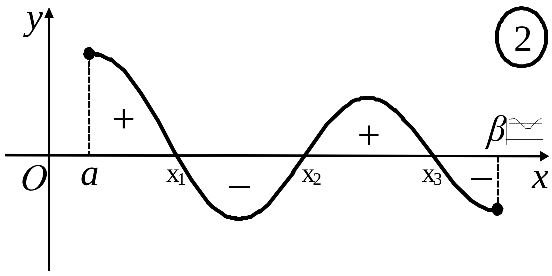
ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

• Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $\mathbf{f(x) \geq 0}$ **για κάθε** $\mathbf{x \in [\alpha,\beta]}$**,** τότε το εμβαδόν του χωρίου *Ω* που ορίζεται **από τη γραφική παράσταση της** f**, τις ευθείες** $x=\alpha$**,** $x=\beta$ **και τον άξονα** $x'x$ **(**Σχ. 1) είναι:

$$\mathbf{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$$



● Αν ***μια συνάρτηση f*** είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και η $f(x)$ δεν παίρνει μη αρνητικές τιμές για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου *Ω* που ορίζεται **από τη γραφική παράσταση της** f **, τις ευθείες** $x=\alpha$**,** $x=\beta$ **και τον άξονα** $x'x$ (Σχ. 2) είναι

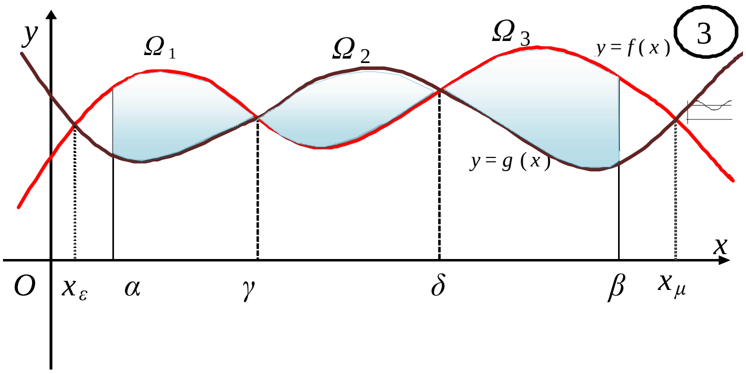


$$\mathbf{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} | f(x) | dx}$$

Άρα $\mathrm{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{x_1} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx - \int_{x_3}^{\beta} f(x)dx}$

● Όταν δίνονται ***δύο συναρτήσεις*** και ζητείται:

— το εμβαδόν του χωρίου *Ω* που περικλείεται **από τις γραφικές παραστάσεις των** f, g **και τις ευθείες** $x=\alpha$ **και** $x=\beta$ (Σχ. 3), τότε αυτό είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3.



Δηλαδή,
$\mathrm{E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)}$

Οπότε, $\mathrm{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\gamma}(f(x)-g(x))dx + \int_{\gamma}^{\delta}(g(x)-f(x))dx + \int_{\delta}^{\beta}(f(x)-g(x))dx}$.

Άρα, $\mathbf{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} | f(x)-g(x) | dx}$

— το εμβαδόν του χωρίου *Ω* που περικλείεται **μόνο από τις γραφικές παραστάσεις των** f, g, τότε αυτό είναι ίσο με :

$\mathbf{E(\Omega)=\int_{x_\varepsilon}^{x_\mu} | f(x)-g(x) | dx}$,όπου x_ε, x_μ η μικρότερη και η μεγαλύτερη αντίστοιχα ρίζα της f(x)-g(x)=0.

ΕΜΒΑΔΑ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-4x$ και $g(x)=-x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφ. παραστάσεις C_f, C_g και

i) τις ευθείες $x=-2$ και $x=-1$

ii) τις ευθείες $x=1$ και $x=2$

iii) τις ευθείες $x=-1$ και $x=4$.

iv) Μόνο από τις C_f· και C_g.

---

2. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τους άξονες χ΄χ , ψ΄ψ ,την ευθεία χ=5 και την γραφ. παράσταση της $f(x)=3x^2-10x+3$.

---

3. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x)=|x^2-1|$,τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=-2$ και $x=2$.

---

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{2x^2}$

i) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$ και $x=t$ με $t>1$.

ii) Έστω E(t) το εμβαδόν του προηγούμενου χωρίου . Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{t\to+\infty} E(t)$.

---

5. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τους άξονες χ΄χ , ψ΄ψ ,την ευθεία χ=4 και την καμπύλη C_f της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$.

---

6. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y=x^3$ και $y=x^2$.

---

7. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφ. παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$, $g(x)=e^{1-x}-1$ και της ευθείας $x=2$.

---

8. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x^2-x, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_f και του άξονα x΄x.

β) Να προσδιορισθεί ο πραγμ. αριθμός α ώστε η ευθεία y=αx να χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά μέρη.

----

9. Από το σημείο Α(2,-3) φέρουμε τις εφαπτόμενες (ε_1)και (ε_2) προς την παραβολή x^2=4y.

Να βρεθούν: α) οι εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2) και

β) το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της παραβολής και των εφαπτομένων (ε_1) και (ε_2).

----

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0=0.

ii) Να βρεθεί το εμβαδόν Ε(α) που περικλείεται από την C_f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=e και x=α , 0<α<1.

iii) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} E(\alpha)$.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία x=1.

----

11. Να βρείτε το εμβαδό Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^2}$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$, όπου $\lambda > 0$.

Έπειτα να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$, $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} E(\lambda)$.

----

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 6x^2, x\geq 0 \\ -3x^2, x<0 \end{cases}$.

α) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$.

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε η ευθεία $x = \lambda$ να χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία .

----

13. Δίνεται η συνάρτηση h (x) = e^x.

α) Να βρείτε μια άρτια συνάρτηση f και μια περιττή συνάρτηση g ορισμένες στο $\mathbb{R}$, τέτοιες ώστε f (x) + g (x) = h (x) .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε (λ) του χωρίου που περικλείεται από τις f , g και τις ευθείες x = 0 και x = λ > 1 .

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}$ Ε (λ) .

----

14. Έστω f, g: $\Re \to \Re$ συνεχείς με $\int_0^x f(t)dt = xe^{-x} + \int_0^x g(t)dt$, x$\in \Re$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, C_g, y΄y.

----

15. Δίνεται η συνάρτηση F(x)=$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ με F(1)=$\frac{\pi}{4}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την G_f, τους άξονες x΄x , y΄y και την ευθεία x=1.

----

16. Έστω f συνεχής στο IR με $f(x) = x^2 + \int_0^x e^{-t} f(x-t)dt$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί είναι παραγωγίσιμη η f στο IR και μετά να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$ για κάθε x$\in$IR.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον x΄x και τις ευθείες x=0 και x=-4.

----

17. Έστω f συνεχής με $\int_0^x (1+t) f(t)dt = x^2 + 6x$ για κάθε x$\geq$0.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι f(x)=$\frac{2x+6}{x+1}$, x$\geq$0.

β) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f στο διάστημα [1, 3].

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1.

----

18. Έστω f συνεχής με $2\int_1^x f(t)dt = x^2 - (\ln x)^2 - 1$ για κάθε x>0. Να αποδείξετε ότι:

α) ο τύπος της f είναι f(x)=x-$\frac{\ln x}{x}$, x>0.

β) η f παρουσιάζει ακριβώς ένα τοπικό ακρότατο στο x_0=1, του οποίου να βρείτε το είδος.

γ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον x΄x και τις ευθείες x=e και x=1 είναι Ε=$\frac{e^2}{2} - 1$.

---

19. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x-1+lnx.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον x΄x και τις ευθείες x=0 και x=e.

---

20. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση f(t)=$\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$.

---

21. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x)=$\begin{cases} e^x - e, & x<1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου , το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=e .

---

22. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x)=$\sqrt{x}$ - $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, x>0 .

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις x=1 και x=4 .
