ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

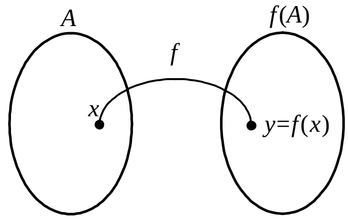
Έστω *A* ένα υποσύνολο του R.

Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το *A*** μια διαδικασία (κανόνα) ***f*** , με την οποία κάθε στοιχείο $\mathbf{x \in A}$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό *y*.

Το *y* ονομάζεται **τιμή της *f* στο *x*** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Γράφουμε: $\mathbf{f:A} \to \mathrm{R}$

$$x \to y = f(x).$$



— Το γράμμα *x*, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του *A* λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα *y*, που παριστάνει την τιμή της *f* στο *x*, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

— Το πεδίο ορισμού *A* της συνάρτησης *f* συνήθως συμβολίζεται με $\boldsymbol{D_f}$. Όταν το $f(x)$ εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης **είναι το "ευρύτερο" υποσύνολο του *R* στο οποίο το $\mathbf{f(x)}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.** Έτσι, συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο λύσεων της ανίσωσης χ-2≥0, δηλαδή το διάστημα Δ=[2,+∞).

— Στα επόμενα θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

— Προσέχουμε ότι **για την εύρεση του πεδίου ορισμού** μιας συνάρτησης f της οποίας δίνεται ο τύπος της :

i) Οι **πολυωνυμικές** συναρτήσεις καθώς και οι συναρτήσεις **y=ημx**, **y=συνx**, **y=α^χ** έχουν **πεδίο ορισμού το R**.

ii) Οι **παρανομαστές** όπου και αν εμφανίζονται, πρέπει να είναι **διαφορετικοί από το μηδέν.**

iii) Οι **υπόριζες ποσότητες** ανεξάρτητα από την τάξη του ριζικού, πρέπει να είναι πάντα **μη αρνητικοί αριθμοί**.

iv) Όπου εμφανίζονται παραστάσεις της μορφής $\mathbf{\log_α φ(x)}$, απαιτούμε: **φ(x)>0.**

v) Όπου εμφανίζονται παραστάσεις της μορφής $\mathbf{u(x)^{v(x)}}$, απαιτούμε: **u(x)>0.**

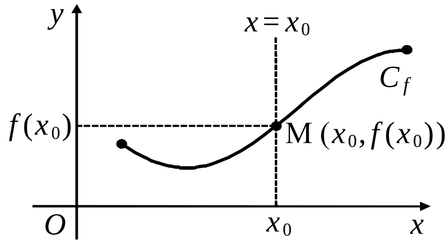
— Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της *f* σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της *f* και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(A)}$. Είναι δηλαδή:

$$\mathbf{f(A)=\{y \in R \text{ ωστε να υπαρχει } x \in A : y = f(x)\}}\ .$$

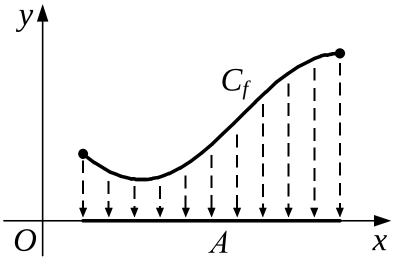
— Όταν θα λέμε ότι **"Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο Β",** θα εννοούμε ότι το *B* είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με **f(B)** θα συμβολίζουμε το σύνολο των τιμών της *f* σε κάθε $x \in B$.

Γραφική παράσταση συνάρτησης

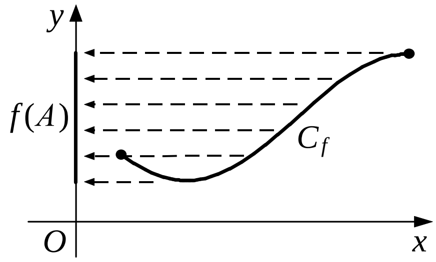
Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.
Το σύνολο των σημείων $\mathbf{M(x,y)}$ για τα οποία ισχύει $\mathbf{y = f(x)}$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $\mathbf{M(x,f(x))}$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.



Η προβολή των σημείων αυτών πάνω στον άξονα x΄x δείχνει το **πεδίο ορισμού A** της f, (σχ.α), ενώ η προβολή τους πάνω στον y΄y το **σύνολο τιμών της f(A),** (σχ.β).



(α)



(β)

ΠΡΟΣΟΧΗ

— Επειδή κάθε $\mathbf{x \in A}$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in$R, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο. Η γραφική παράσταση της **f τέμνει τον άξονα y΄y** στο σημείο A(0,f(0)).

— Όταν δίνεται η γραφική παράσταση $\mathbf{C_f}$, μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
y= – f (x), y=|f(x)|, y=f(x)+c και y=f(x-c).

α) **Η γραφική παράστασης της συνάρτησης –f** είναι συμμετρική της $\mathbf{C_f}$, ως προς τον άξονα x΄x.

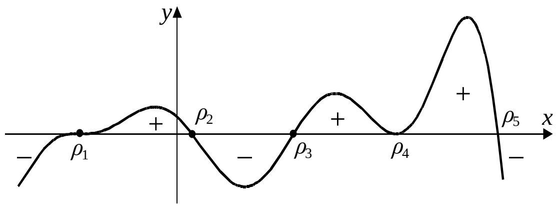
β) **Η γραφική παράσταση της $|f|$** αποτελείται από τα τμήματα της $\mathbf{C_f}$ που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

γ) **Η γραφική παράστασης της συνάρτησης y=f(x)+c** προκύπτει από την γραφική παράσταση της **y=f(x)** με ***μετατόπισή της παράλληλα στον y΄y κατά c μονάδες*** (προς τα πάνω αν c>0 και προς τα κάτω αν c<0).

δ) **Η γραφική παράστασης της συνάρτησης y=f(x-c)** προκύπτει από την γραφική παράσταση της **y=f(x)** με ***μετατόπισή της παράλληλα στον x΄x κατά c μονάδες*** (προς τα δεξιά αν c>0 και προς τα αριστερά αν c<0).

— Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης **f βρίσκεται πάνω** (αντίστοιχα κάτω) **από τον άξονα x΄x** στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της για τα οποία ισχύει ότι **f(x)>0** (f(x)<0).

Η γραφική παράσταση της **f τέμνει τον άξονα x΄x** στα σημεία (ρ,0) όπου f(ρ)=0.

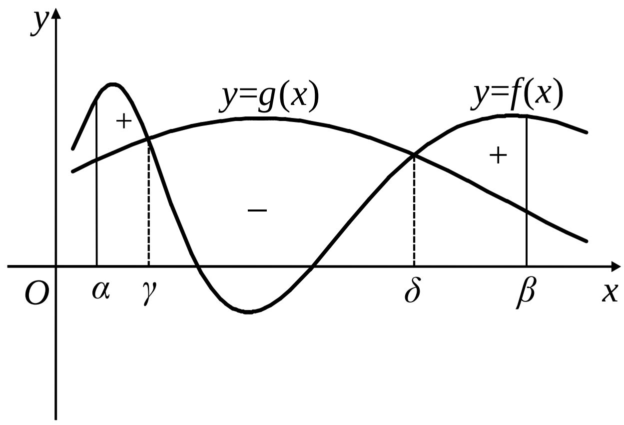


— Για να βρούμε τη **σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g στο [α,β]** των συναρτήσεων f,g αντίστοιχα, μελετάμε το **πρόσημο της διαφοράς**

f(x)-g(x) για x∈[α,β] .

α) Αν **f(x)-g(x)>0** για κάθε x ενός διαστήματος Δ, τότε στο Δ η **C_f είναι ψηλότερα από τη C_g.**

β) Αν **f(x)-g(x)<0** για κάθε χ ενός διαστήματος Δ, τότε στο Δ η **C_f είναι χαμηλότερα από τη C_g.**



γ) **Τα κοινά σημεία των C_f, C_g** είναι τα σημεία με τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης **f(x)-g(x)=0.**

<u>Άρτια – περιττή συνάρτηση</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται :

i) **Άρτια** , αν **για κάθε x∈A** ισχύει: **-x∈A** και **f(-x)=f(x)**

ii) **Περιττή**, αν **για κάθε x∈A** ισχύει: **-x∈A** και **f(-x)= -f(x).**

<u>Η γραφική παράσταση</u> κάθε **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας τον y΄y**, ενώ κάθε **περιττής** έχει **κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων Ο.**

Παραδείγματα

α) Η συνάρτηση **$f(\chi)=\chi^2$** έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$

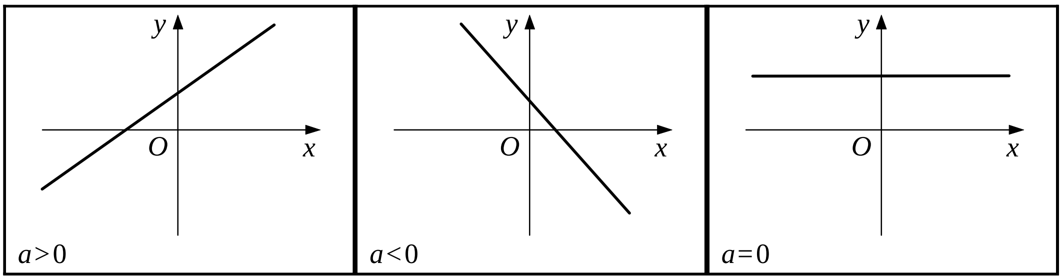
Για κάθε $\chi\in A=\mathbb{R}$ ισχύει ότι $-\chi\in A$ και $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. Άρα η f είναι άρτια.

β) η συνάρτηση **$f(\chi)=\chi^3$** έχει π.ο. το $A=\mathbb{R}$

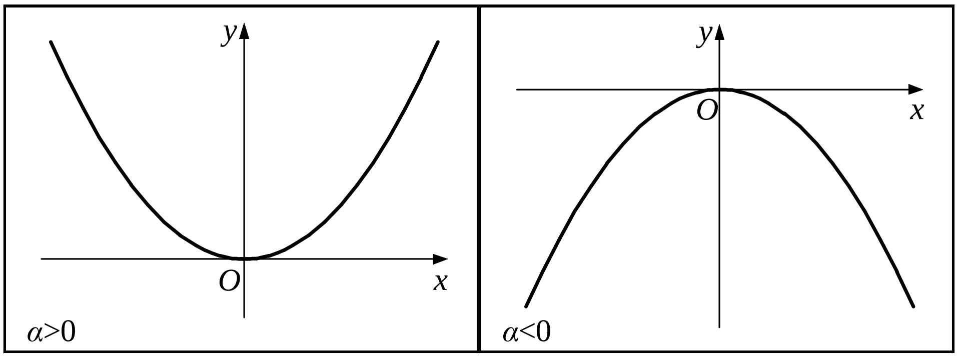
Για κάθε $\chi\in A=\mathbb{R}$ ισχύει ότι $-\chi\in A$ και $f(-x)=(-x)^3= -x^3=-f(x)$. Άρα η f είναι περιττή.

Μερικές βασικές συναρτήσεις

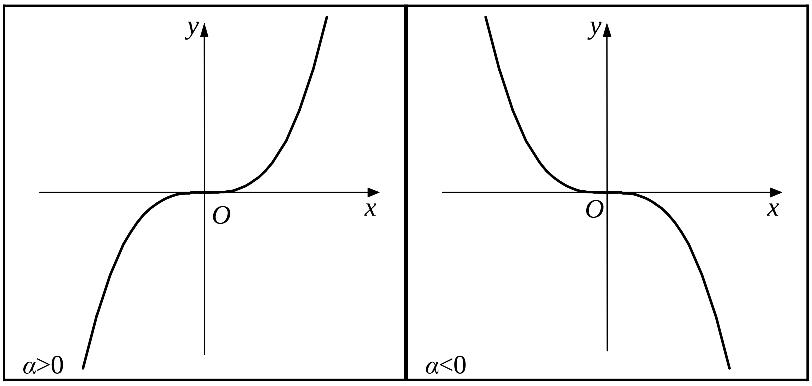
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$



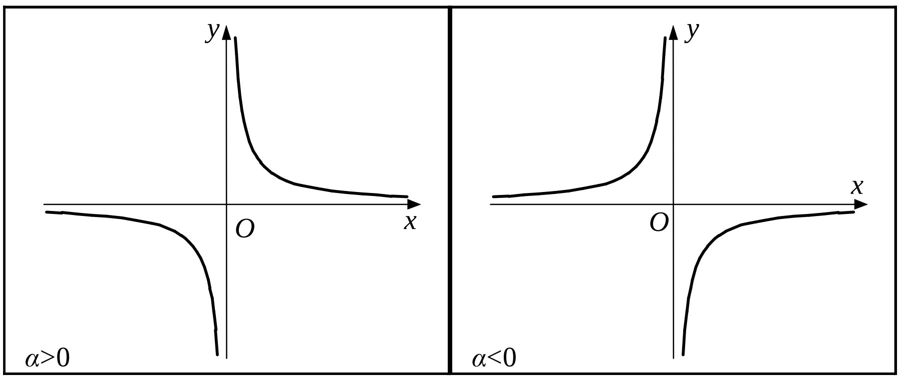
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.



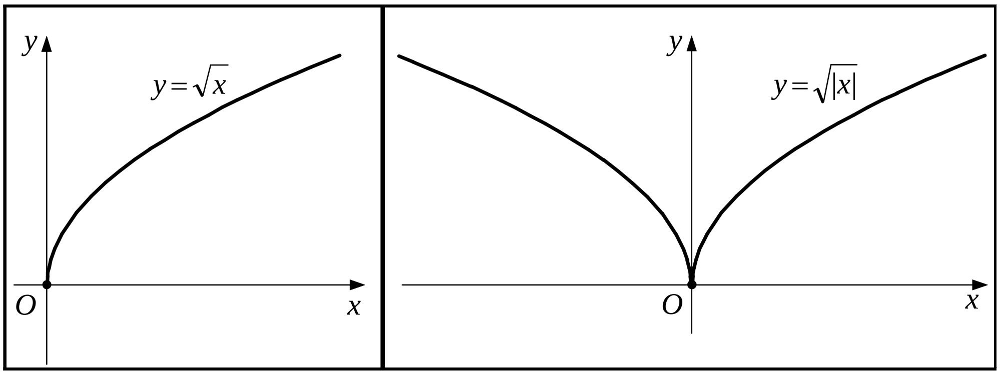
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3$, $\alpha \neq 0$.



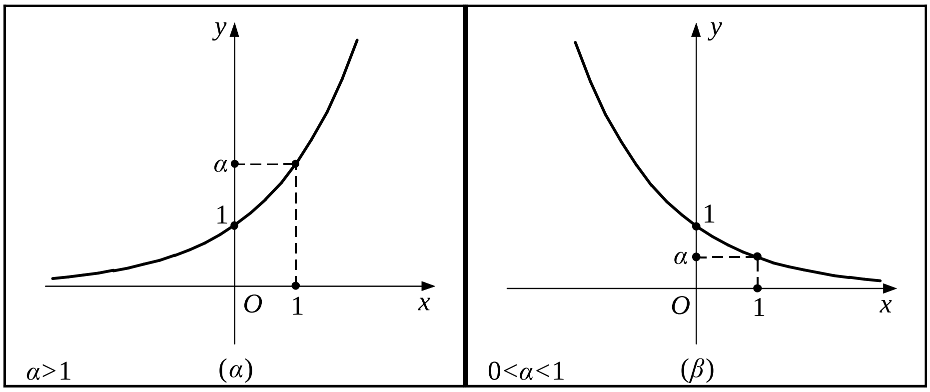
Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$.



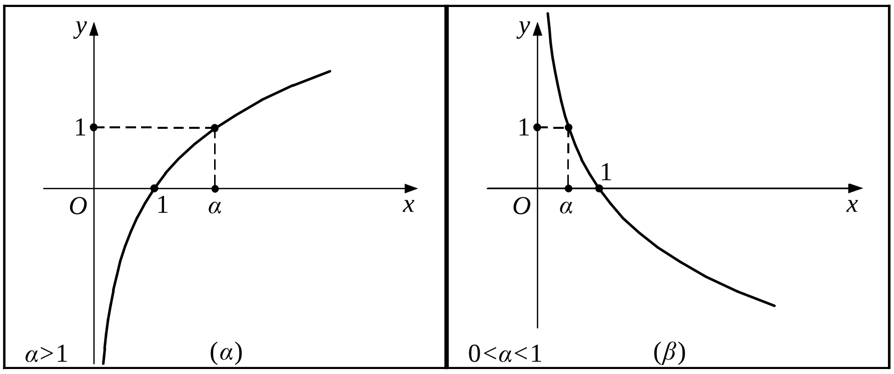
Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}$.



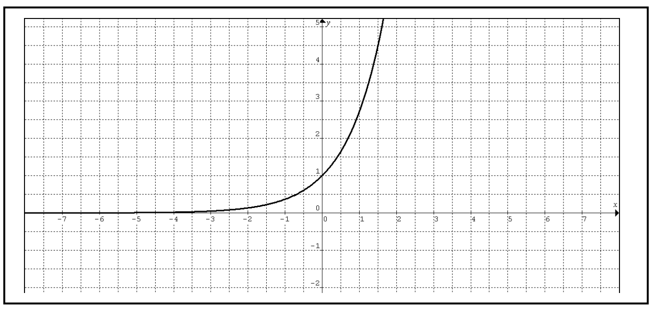
Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$.

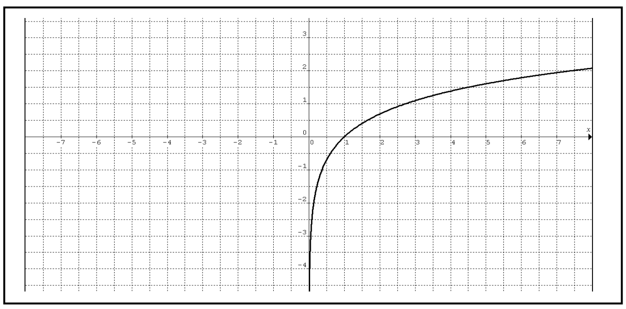


Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$



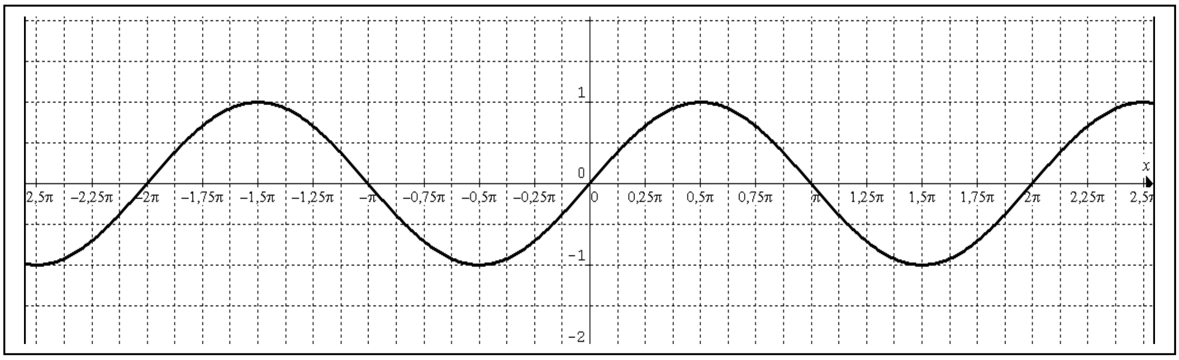
f(x)=e^x **f(x)=lnx**



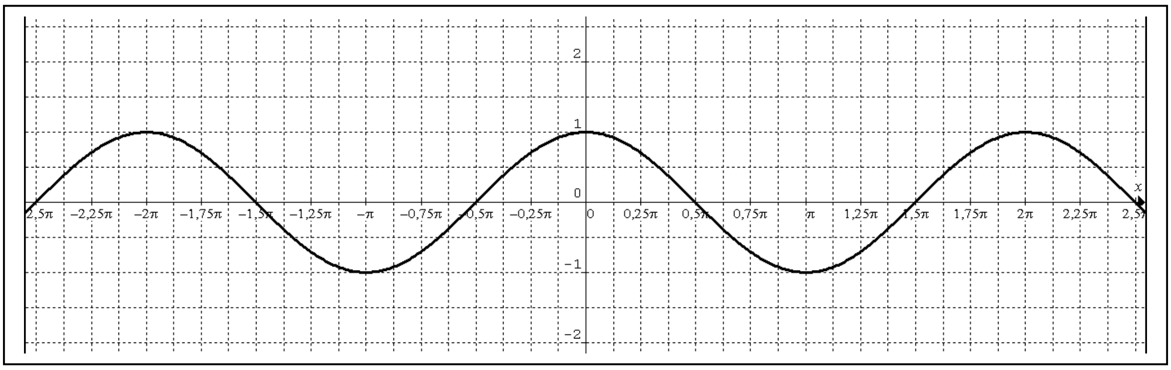


Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις :

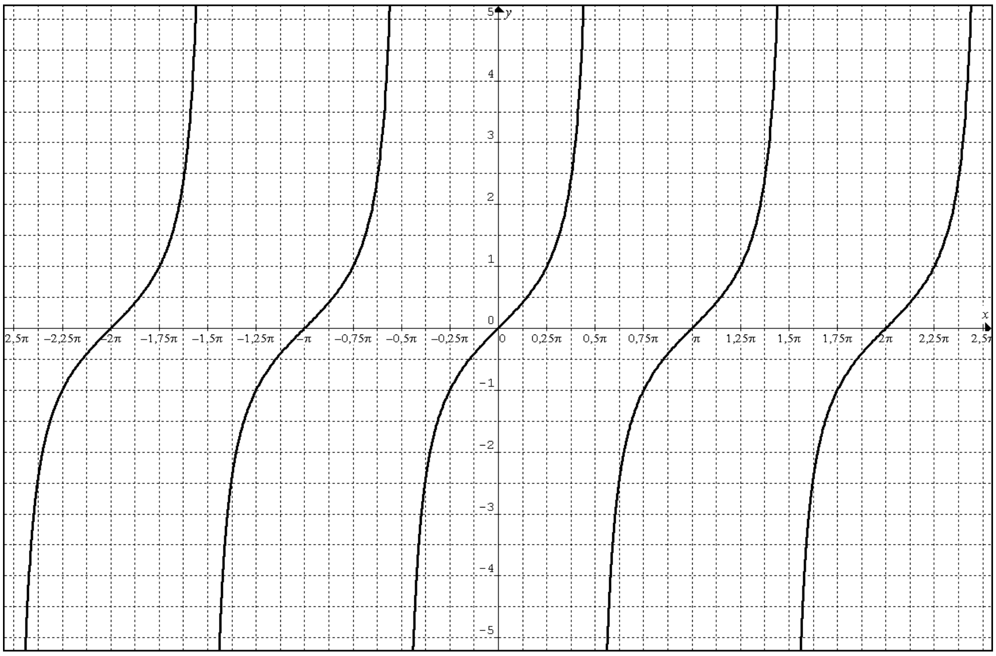
$$f(x) = \text{ημ}x$$



$$f(x) = \text{συν}x$$



$$f(x) = \text{εφ}x$$



Ισότητα συναρτήσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ

> Δύο συναρτήσεις *f* και *g* λέγονται **ίσες** όταν:
>
> έχουν το **ίδιο πεδίο ορισμού** *Α* και για κάθε $\mathbf{x \in A}$ ισχύει $\mathbf{f(x) = g(x)}$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις *f* και *g* είναι ίσες γράφουμε $f = g$ **.**

Έστω τώρα *f, g* δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού *Α, Β* αντιστοίχως και *Γ* ένα υποσύνολο των *Α* και *Β*. Αν για κάθε $\mathbf{x \in \Gamma}$ ισχύει $\mathbf{f(x) = g(x)}$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις ***f* και *g* είναι ίσες στο σύνολο *Γ***.

Για **παράδειγμα,** οι συναρτήσεις

$$\mathbf{f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}} \quad \text{και} \quad \mathbf{g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}},$$

έχουν πεδία ορισμού τα σύνολα $D_f = \mathbf{A} = \mathrm{R} - \{\mathbf{2}\}$ και $D_g = \mathbf{B} = \mathrm{R} - \{\mathbf{0}\}$ αντιστοίχως.

Οι συναρτήσεις αυτές ***δεν είναι ίσες*** γιατί δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, είναι όμως ίσες στο σύνολο $\mathbf{\Gamma} = \mathrm{R} - \{\mathbf{0, 2}\}$, αφού για κάθε $\mathbf{x \in \Gamma}$ ισχύει:

$$\mathbf{f(x) = g(x) = x + 2}.$$

Πράξεις με συναρτήσεις

Ορίζουμε ως **άθροισμα** $f + g$, **διαφορά** $f - g$, **γινόμενο** $f \cdot g$ και **πηλίκο** $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων *f, g* τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Το πεδίο ορισμού των $\mathbf{f + g}$, $\mathbf{f - g}$ ***και*** $\mathbf{f \cdot g}$ είναι η τομή $D_f \cap D_g$ των πεδίων ορισμού των συναρτήσεων *f* και *g* αντιστοίχως, ενώ ***το πεδίο ορισμού της*** $\mathbf{\frac{f}{g}}$ είναι το $D_f \cap D_g$, εξαιρουμένων των τιμών του *x* που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ- ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

i) $f_1(x)=\dfrac{\ln x}{x-2}$ ii) $f_2(x)=\sqrt{1-\ln x}$ iii) $f_3(x)=\left(x^2+x-2\right)^{\frac{3}{2}}$

iv) $f_4(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$ v) $f_5(x)=\dfrac{3x-5}{|x|-x}$ vi) $f_6(x)=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{|x|-2}}$

vii) $f_7(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$ viii) $f_8(x)=x^{\eta\mu x}$.

---

2. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

i. $f(\chi) = \ln\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$

ii. $\varphi(\chi) = \dfrac{\sqrt{3-|2-x|}}{\ln x}$

iii. $\sigma(\chi) = \sqrt{12-x-x^2}$

iv. $h(\chi) = \ln\dfrac{x+2}{5-x}+3\ln\dfrac{x-1}{x-3}$

v. $g(\chi) = \dfrac{x^2+x+1}{9^x-4.3^{x+1}+27}$

vi. $\rho(\chi) = \sqrt{x-\sqrt{x^2-2}}$

vii. $t(\chi) = \log(2-\log x)$

viii. $\pi(\chi) = \sqrt{\ln(x-1)}$

---

3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x^2(x+2)-1}{x^2-1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

γ. Να εξετάσετε αν το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

---

4. Μια συνάρτηση $f: \Re\to\Re$ είναι παραβολή της μορφής $f(x)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$.

Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία Α(-1,6), Β(1,0) και Γ(2,0) να βρεθεί:

i. Ο τύπος της f , και να σχεδιασθεί η C_f.

ii. Τα κοινά σημεία της C_f και του άξονα χ΄χ.

iii. Τα διαστήματα που η Cf είναι κάτω από τον χ΄χ.

---

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + (2-\alpha)x^2 - (\alpha+3)x + \alpha^2 - 5,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$

α. Να βρεθούν οι τιμές του α έτσι, ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(2,0)$.

β. Για $\alpha=1$:

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες.

ii. Να βρεθεί η σχετική θέση της C_f με τον άξονα $x'x$.

iii. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g, όπου $g(x) = -4x - 4$.

---

6. Να γίνει γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x)=e^x-2$ ii) $f(x)=e^{x+2}$ iii) $f(x)=e^{x-3}-2$

iv) $f(x)=\ln x-3$ v) $f(x)=\ln(x-3)$ vi) $f(x)=\ln(x-2)+1$

vii) $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ viii) $f(x) = |\ln x-1|$ ix) $f(x) = \ln\frac{1}{x}$

x) $f(x) = \sqrt{(e^x-2)^2}$ xii) $f(x)= \eta\mu(\chi+\frac{\pi}{3})$ xiii) $f(\chi) = |\chi^3-1|$.

---

7. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = 4^x-2^{x+1}$ και $g(x) = 2^{x+2}-8$.

a. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

b. Να βρεθούν τα διαστήματα, στα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g.

ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ- ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

8. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες. Αν όχι να βρείτε το ευρύτερο σύνολο στο οποίο αυτές είναι ίσες.

α. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-9}$ και $g(x) = \dfrac{x-1}{x-3}$

β. $f(x) = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ και $g(x) = \dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

γ. $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ και $g(x) = \dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

δ. $f(x)= \ln(\chi^2-9)$ και $g(x)= \ln(\chi-3)+\ln(\chi+3)$

ε. $f(x)= \ln\chi^5$ και $g(x)= 5\ln\chi$

στ) $f(x)= \sqrt{x-1}+\sqrt{|x|}$ και $g(x) = \sqrt{|x-1|}+\sqrt{x}$.

---

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ και $g(x)=\dfrac{x^3-x}{x-2}$.

Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$.

---

10. Αν $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x<1 \\ 2x, & \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} x-1, & \text{αν } x\leq 2 \\ -x^2, & \text{αν } x>2 \end{cases}$ να ορίσετε τις συναρτήσεις:

α. $f+g$ β. $f\cdot g$ γ. $\dfrac{f}{g}$.

ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

11. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Να αποδείξετε ότι:

α. η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

β. η f είναι περιττή.

---

12. Δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχουν τις ιδιότητες:

$f^2(x)=f(x)f(-x)$ και $g^2(x)=-g(x)g(-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή.

---

13. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει τις ιδιότητες:

$f(x)\leq x^3$ και $f(x+y)\leq f(x)+f(y)+3xy(x+y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το $f(0)$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(-x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε τον τύπο της f.

δ. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

---

14. Αν για τις συναρτήσεις f,g:A→R ισχύει:

(f+g)(x)·[(f+g)(x)-6]=2·[(f·g)(x)-9] για κάθε x∈A. Να δείξετε ότι f=g.

---

15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$\left(f^2+g^2\right)(x)\leq 2\left(f+g\right)(x)-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $f=g$.

---

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι $f = g$, όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η αντίστοιχη σχέση:

i. $\left[f(x)+g(x)\right]\left[\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{g(x)}\right]=4,\ \ f(x)g(x)\neq 0$

ii. $f(x)\left[f(x)-g(x)\right]+g(x)\left[g(x)-h(x)\right]+h(x)\left[h(x)-f(x)\right]=0$.

---

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(0)=0$ και

$$2f(x)+f(1-y)+g(x)-g(y)=3(x+1)^2-6y \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι $2f(x)+f(1-x)=3x^2+3,\ \ x\in\mathbb{R}$.

ii. $f(x)=x^2+2x,\ \ x\in\mathbb{R}$

iii. $f = g$.

---

18. Θεωρούμε την συνάρτηση f για την οποία ισχύει $x(x-5)f(x)=x^2+4(1-f(x))$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να προσδιορισθεί το σύνολο τιμών της.

---

19. Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης $f:R\to R$ που είναι τέτοια ώστε:

$xf(x)+f(1-x)=x^2+x+3$, για κάθε $x\in R$.

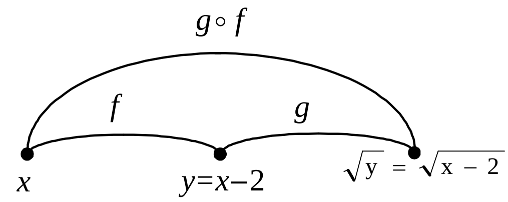
Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{\varphi(x) = \sqrt{x-2}}$.

Η τιμή της *φ* στο *x* μπορεί να οριστεί σε δύο φάσεις ως εξής:

α) Στο $x \in R$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $y = x - 2$ και στη συνέχεια

β) στο $y = x - 2$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $\sqrt{y} = \sqrt{x-2}$, εφόσον $y = x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.



Στη διαδικασία αυτή εμφανίζονται δύο συναρτήσεις:

α) η $f(x) = x - 2$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A=R ***(α΄ φάση)*** και

β) η $g(y) = \sqrt{y}$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $B = [0,+\infty)$ ***(β΄ φάση).***

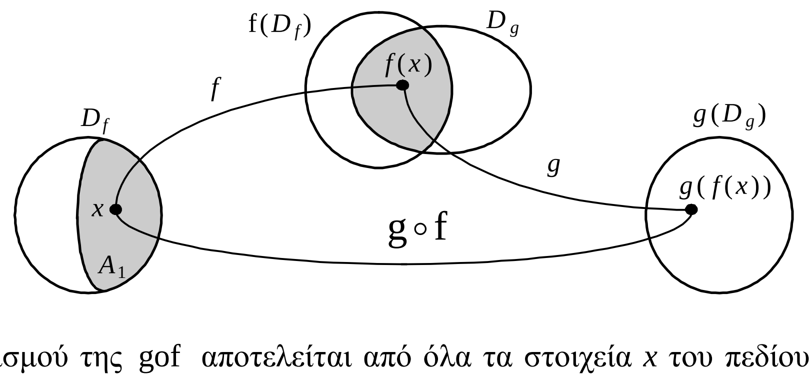
Έτσι, η τιμή της *φ* στο *x* γράφεται τελικά: $\boldsymbol{\varphi(x) = g(f(x))}$.

Η συνάρτηση *φ* λέγεται ***σύνθεση της f με την g*** και συμβολίζεται με ***gof*** .

Παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της φ δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού A της f, αλλά περιορίζεται στα $x \in A$ για τα οποία η τιμή $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού B της g, δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = [2,+\infty)$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

> Αν *f*, *g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού D_f,D_g αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της *f* με την *g***, και τη συμβολίζουμε με ***gof*** , τη συνάρτηση με τύπο
>
> $\boldsymbol{(gof)(x) = g(f(x))}$.



Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία *x* του πεδίου ορισμού της *f* για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της *g*. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$\mathbf{D_{g\circ f} = A_1 = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}}.$$

Η gof ορίζεται αν $\mathbf{A_1} \neq \varnothing$, δηλαδή αν $\mathbf{f(D_f) \cap D_g} \neq \varnothing$.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που οι συνθέσεις τους έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

Παράδειγμα

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=1-x^2$ και $g(x)=\sqrt{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i) ***gof*** **ii)** ***fog*** .

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f=R$, ενώ η g το $D_g=[0.+\infty)$.

i) $\mathbf{D_{g\circ f}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}}$

Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει: $x\in D_f$ **και** $f(x)\in D_g$ (1)

ή ισοδύναμα, $\begin{cases} x\in R \\ f(x)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ 1-x^2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ -1\leq x\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$,

δηλαδή πρέπει $x\in[-1,1]$. Επομένως, ορίζεται η gof και είναι

$$\mathbf{(gof)(x)=g(f(x))=g(1-x^2)=\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{για κάθε} \quad \mathbf{x\in[-1,1].}$$

ii) $\mathbf{D_{f\circ g}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}}$

Για να ορίζεται η παράσταση $f(g(x))$ πρέπει: $\mathbf{x\in D_g}$ και $\mathbf{g(x)\in D_f}$

ή ισοδύναμα, $\begin{cases} x\geq 0 \\ g(x)\in R\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 0$, δηλαδή πρέπει $x\geq 0$.

Επομένως, ορίζεται η *fog* και είναι

$$\mathbf{(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=1-x}, \quad \text{για κάθε} \quad \mathbf{x\in[0,+\infty).}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

● Παρατηρούμε στο παραπάνω παράδειγμα ότι ***fog ≠ gof*** .

Γενικά, αν *f, g* είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι *gof* και *fog*, τότε αυτές ***δ ε ν ε ί - ν α ι υ π ο χ ρ ε ω τ ι κ ά*** ίσες.

● Αν *f, g, h* είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η *ho(gof)*, τότε ορίζεται και η *(hog)of* και ισχύει: **ho(gof) = (hog)of** .

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των *f, g* και *h* και τη συμβολίζουμε με **hogof** .

Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η f(χ) = $\sqrt{3-2x-x^2}$ και g(χ) = 2ημχ-1. Να βρεθεί η f og.

---

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: f(χ) = 2χ-1, και $\chi\in[-3,3]$ και g(χ) = 5-2χ, και $\chi\in[3,7]$. Να οριστούν οι συναρτήσεις: fog και gof.

---

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=25x^2+20x+2$ και $g(x)=\sqrt{x+2}$. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $g\circ f$ και να κάνετε την γραφική της παράσταση.

---

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+x+2$ και $g(x)=\sqrt{1-|x-3|}$. Να ορισθεί η συνάρτηση $g\circ f$.

---

5. Έστω f(ln2x) = x+3, x>0. Να βρεθεί η f.

---

6. Έστω $(fog)(x)=x^3-6x^2+12x+15,\ \ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x-2$. Να βρεθεί η f.

---

7. Έστω $f(g(x))=x^4-3x^2+x-2,\ \ x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=4x-5$. Αν η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ να βρεθεί ο τύπος της.

---

8. Αν η συνάρτηση f έχει Π.Ο. το [7,27] να βρεθεί το Π.Ο. της συνάρτησης $g(x) = f(x^3+x-3)$.

---

9. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με g(x) =x-2 και $(fog)(x) = x^2+x+1$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η συνάρτηση f.

---

10. Αν f(χ) =χ+3, να βρεθεί η συνάρτηση g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(fog)(x) = e^{\chi+1}+3$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

---

11. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: (fof)(x) = xf(x) για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί f(0).

---

12. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: (fof)(x) = 4-x, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.
    Να βρεθεί f(2).

---

13. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: (fof)(x) = x^5, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.
    Να αποδείξετε ότι $f(x^5) = f^5(x)$ για κάθε $\chi \in \Re$.

---

14. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: (fofof)(x) = -x, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$,
    ν.δ.ο: η f είναι περιττή.

---

15. Θεωρούμε την συνάρτηση *f:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
    $(f \circ f)(x)=4x+3$ και $(f \circ f \circ f)(x)=8x+\lambda$,για κάθε $x \in R$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.
    Να δείξετε ότι f(x)=2x+1.

---

16. Θεωρούμε την συνάρτηση *f:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f \circ f)(x)=x^2-3x+4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι f(2)=2.

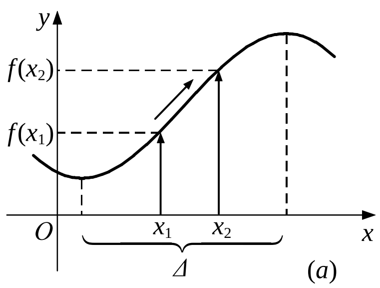
Μονοτονία συνάρτησης

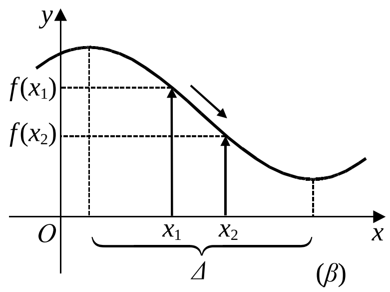
ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται :

• **γνησίως αύξουσα** σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $\mathbf{x_1, x_2 \in \Delta}$ με $\mathbf{x_1 < x_2}$ ισχύει: $\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$ (Σχ. α)

• **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $\mathbf{x_1, x_2 \in \Delta}$ με $\mathbf{x_1 < x_2}$ ισχύει: $\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$ (Σχ. β)





Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα *Δ*, γράφουμε $f\uparrow$ ***Δ*** (αντιστοίχως $f\downarrow$ ***Δ***).

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι **η f είναι γνησίως μονότονη στο *Δ*.**
Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα *Δ* και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι **η f είναι γνησίως μονότονη**.

—— Μια συνάρτηση f λέγεται, απλώς,:

• **αύξουσα** σ' ένα διάστημα *Δ*, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \le f(x_2)$.

• **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα *Δ*, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Ακρότατα συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού *Α* θα λέμε ότι:

• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $\mathbf{f(x) \le f(x_0)}$ για κάθε $x \in A$

• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν $\mathbf{f(x) \ge f(x_0)}$ για κάθε $x \in A$

Άλλες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.
Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της f.

Συνάρτηση 1–1

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f{:}A\to\mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1–1**, όταν για οποιαδήποτε $\mathbf{x_1, x_2 \in A}$ ισχύει η συνεπαγωγή: *αν* $\mathbf{x_1 \neq x_2}$, *τότε* $\mathbf{f(x_1) \neq f(x_2)}$.

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μια συνάρτηση $f{:}A\to\mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση 1–1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $\mathbf{x_1, x_2 \in A}$ ισχύει η συνεπαγωγή: *αν* $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)}$, *τότε* $\mathbf{x_1 = x_2}$.

ΣΧΟΛΙΑ

- Από τα παραπάνω προκύπτει ότι **μια συνάρτηση *f* είναι** 1–1**, αν και μόνο αν:**

– Τα διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ έχουν πάντοτε διαφορετικές εικόνες.

– Για κάθε στοιχείο *y* του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς *x*.

– Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της *f* το πολύ σε ένα σημείο.

- Αν μια συνάρτηση είναι **γνησίως μονότονη**, τότε προφανώς είναι **συνάρτηση 1-1**.

  Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι 1–1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

- Αν η f είναι 1-1 τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία:

$$\boldsymbol{\alpha=\beta \Leftrightarrow f(\alpha)=f(\beta)}.$$

Αντίστροφη συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση $f:A \to R$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι $1-1$, τότε για κάθε στοιχείο *y* του συνόλου τιμών, $f(A)$, της *f* υπάρχει μοναδικό στοιχείο *x* του πεδίου ορισμού της *A* για το οποίο ισχύει $f(x)=y$.

Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση την οποία ονομάζουμε **αντίστροφη συνάρτηση** της *f* και συμβολίζεται με f^{-1}.

$$\mathbf{f^{-1}:f(A)} \to R$$

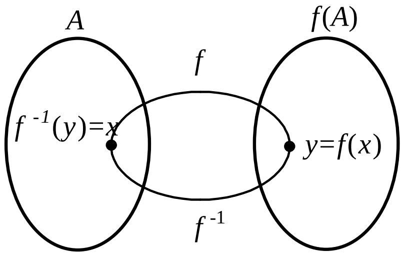
με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η f^{-1} προκύπτει ότι:

– έχει ***πεδίο ορισμού*** το σύνολο τιμών $\mathbf{f(A)}$ της *f*,

– έχει ***σύνολο τιμών*** το πεδίο ορισμού *A* της *f* και

– ισχύει η ισοδυναμία: $\mathbf{f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x}$.



Αυτό σημαίνει ότι, αν η *f* αντιστοιχίζει το *x* στο *y*, τότε η f^{-1} αντιστοιχίζει το *y* στο *x* και αντιστρόφως.

Δηλαδή η f^{-1} είναι η αντίστροφη διαδικασία της *f* οπότε:

$$\boldsymbol{f^{-1}(f(x))=x,\quad x\in A} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{f(f^{-1}(y))=y,\quad y\in f(A)}.$$

Οι γραφικές παραστάσεις *C* και C' των συναρτήσεων *f* και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\mathbf{y=x}$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Για ***παράδειγμα***, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$.

Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι $1-1$ με πεδίο ορισμού το R και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της *f*.

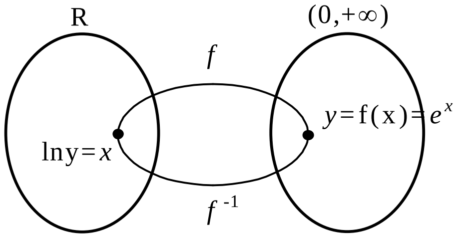
Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,

—έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$

—έχει σύνολο τιμών το R και

—αντιστοιχίζει κάθε $y \in (0,+\infty)$ στο

μοναδικό $x \in R$ για το οποίο ισχύει $e^x = y$.



Επειδή όμως: $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$ θα είναι

$$\mathbf{f^{-1}(y) = \ln y}.$$

Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$, $0 < \alpha \neq 1$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $\mathbf{f^{-1}(x) = \ln x}$.

Συνεπώς

$$\mathbf{f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(e^x) = \ln e^x = x, \quad x \in R} \quad \text{και}$$

$$\mathbf{f(f^{-1}(x)) = f(\ln x) = e^{\ln x} = x, \quad x \in (0,+\infty)}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

   i. $f(x)=2x^2-1$ ii. $g(x)=2x^3-1$ iii. $h(x)=\begin{cases}3x-1, & x<1\\ -2x\ \ , & x\geq 1\end{cases}$

---

2. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

   i. $f(x)=2x^2-x-1$ ii. $g(x)=2\eta\mu x-3$

   iii. $h(x)=1-2\ln(x-1),\ x\in[2,3]$.

---

3. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f^2(x)-3}{3f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

---

4. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(f(x+1))=x+1$ να δείξετε ότι $f(x)=x$.

---

5. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση: $f(x)=2^x+x$.

   β) Να λυθεί η ανίσωση: $2^{3x-x^2}-x^2>2^{6-2x}-5x+6$.

---

6. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες είναι γν. αύξουσες.

   α. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις fog και $f+g$ είναι γνησίως αύξουσες.

   β. Δίνεται η συνάρτηση h με $h(x)=f(2x-1)+f(3x-2),\ x\in\mathbb{R}$.

      i. Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία.

      ii. Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1 να λύσετε την ανίσωση $f(2x-1)<-f(3x-2)$.

---

7. Να λυθούν οι ανισώσεις:

   i. $\ln x>1-x$

   ii. $f(2x^2-x+3)<f(3x+x^2)$ άν $f(x)=e^x+x$

   iii. $f(x^2+1)<f(2x-2)$ αν $f(x)=x+\ln x$.

1-1 - ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

8. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφη καθεμιάς.

   i) $f(x)=x^3+2$ ii) $f(x)=\sqrt{x-5}$ iii) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{αν } x\geq 2 \\ x+1 & \text{αν } x<2 \end{cases}$

---

9. Θεωρούμε την συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$, $\beta\in\mathbb{R}$.
   i) Να βρείτε , αν υπάρχει , την f^{-1}.
   ii) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $f=f^{-1}$.

---

10. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφή τους.

    i) $f(x)=\dfrac{e^x+3}{e^x}$ ii) $f(x)=\ln(2+e^x)-x$. iii) $f(x)=\log\sqrt{3-10^x}$.

---

11. Αν $f(x)=\dfrac{2\ln x-3}{5}$ και $g(x)=1+\ln x$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την $F=f^{-1}og$.

---

12. Να προσδιορίσετε την 1-1 συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

    $(fofof)(x-1)=(fof)(x+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

---

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(gof)(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
    i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
    ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-8x+7)=f(x-1)$.

---

14. Δίνονται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(f(x))=\alpha x+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ($\alpha\neq 0$).

    Να αποδείξετε ότι: i) η f είναι 1-1, ii) $f(0)=0$.

---

15. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2e^x-1$. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και στη συνέχεια να βρεθεί η f^{-1}.

---

16. Τα σημεία Α(2, 3) και Β(6, 5) βρίσκονται πάνω στη γραφική παράσταση της γνησίως μονότονης συνάρτησης $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
    α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
    β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφη συνάρτηση έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.
    γ. Να υπολογίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε $f^{-1}(3+f^{-1}(\lambda^2-2\lambda+3))=6$.

---

17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^3+8x-8$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γν. αύξουσα.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x))>1$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

δ. Να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(-8)$.

ε. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)>1$.

---

18. Για τη συνάρτηση f ισχύει η σχέση: $f(xy)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

i. $f(1)=0$ ii. $f(\frac{1}{x})=-f(x)$.

iii. Με την παραδοχή, ότι η μονάδα είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$, να δείξετε ότι αν κ,λ είναι διακεκριμένοι θετικοί αριθμοί, τότε $f(\kappa)\neq f(\lambda)$.

---

19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\left(fof+gof\right)(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. η f είναι 1-1. ii. ισχύει $f^{-1}(x)=f(x)+g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

---

20. Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(f(x))=x^2-x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(1)=1$

β. Δεν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$g(x)+xf(x)-x^2=1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

---

21 Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι 1-1 και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$(fofof)(2-x)=(fof)(x^2-4x+5)$, να δειχθεί ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

---

22. Δίνεται η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί την σχέση: $f^3(x)+f(x)+x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

---

23. Μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x)+2f(x)=x-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. β. Να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε την f^{-1}.

---

24. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{4}{3}-2^x$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{4}{3}=2^x$.

----

25. Μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$(fof)(x)-f(x)+x^{2009}=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

ii. Να υπολογίσετε το $f(0)$.

----

26. Α. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$ και $f(x)=x$ είναι ισοδύναμες.

Β. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{4x^3-1}{3}$ και στη συνέχεια τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1

Αν οι συναρτήσεις f,g,h ορίζονται στο $\mathbb{R}$ να δειχθεί ότι:

i. η fog είναι 1-1 όταν οι f,g είναι 1-1

ii. η g είναι 1-1 όταν η fog είναι 1-1

iii. $g=h$ όταν $fog = foh$ και η f είναι 1-1

iv. η g είναι 1-1 όταν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $(fog)(x)=x$

v. η f είναι 1-1 όταν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $(fof)(x)=xf(x)$ και $f(x)\neq 0$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση ***f(x).*** Να δείξετε ότι η αντίστροφή της συνάρτηση f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την ***f.***

ΘΕΜΑ 3

Έστω η αντιστρέψιμη συνάρτηση ***f:*** $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν η ***f*** είναι περιττή να δείξετε ότι και η f^{-1} είναι επίσης περιττή.

ΘΕΜΑ 4

Έστω η αντιστρέψιμη συνάρτηση ***f:*** $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x$.
(Δηλαδή αν η γραφική παράσταση της f^{-1} έχει κοινό σημείο με την y=x τότε το σημείο αυτό είναι και σημείο της C_f και αντιστρόφως).

ΘΕΜΑ 5

Έστω η συνάρτηση ***f:*** $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι αν η ***f*** είναι γνησίως αύξουσα τότε: $f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$.

β) Να δείξετε ότι οι εξισώσεις $f^{-1}(x)=f(x)$ και $f(x)=x$ δεν είναι πάντα ισοδύναμες.

Σε ποια συμπεράσματα για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων οδηγούμαστε από τις παραπάνω προτάσεις.

ΘΕΜΑ 6

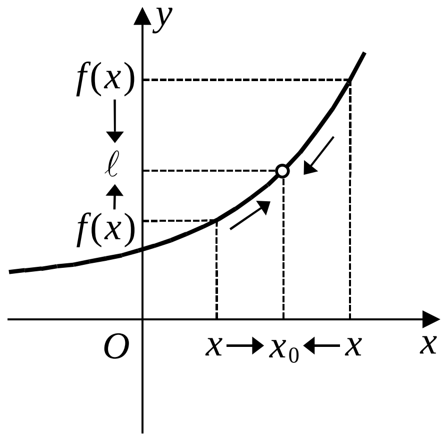
Έστω οι αντιστρέψιμες συναρτήσεις $f:A\to B$ και $g:B\to \Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση ***gof*** αντιστρέφεται,

β) $(g\, o\, f)^{-1}= f^{-1}\; o\; g^{-1}$.

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in R$



Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ και διαβάζουμε:

“το όριο της $f(x)$*, όταν το x τείνει στο* x_0*, είναι* ℓ*”*

“το όριο της $f(x)$ ***στο*** x_0 ***είναι*** ℓ***”.***

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι:

— Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, **πρέπει η** f **να ορίζεται όσο θέλουμε “κοντά στο** x_0**”**, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής

$$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \quad \text{ή} \quad (\alpha, x_0) \quad \text{ή} \quad (x_0, \beta).$$

— Το x_0 **μπορεί να ανήκει** στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης **ή να μην ανήκει** σ’ αυτό.

— Η τιμή της f στο x_0 δηλαδή το $f(x_0)$, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 ή διαφορετική από αυτό.

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές $(x < x_0)$, τότε γράφουμε:

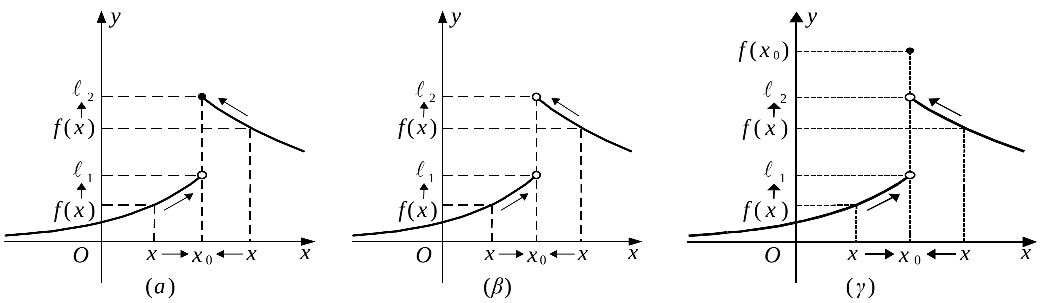
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1$$ και διαβάζουμε:

“το όριο της $f(x)$***, όταν το x τείνει στο*** x_0 ***από τα αριστερά, είναι*** ℓ_1***”.***

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές $(x > x_0)$, τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$ και διαβάζουμε:

“το όριο της $f(x)$***, όταν το x τείνει στο*** x_0 ***από τα δεξιά, είναι*** ℓ_2***”.***



Τους αριθμούς $\ell_1 = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2 = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.
Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell}$$

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0, τότε αυτό είναι **μοναδικό** και συμβολίζεται, όπως είδαμε, με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Στη συνέχεια, **όταν γράφουμε** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$**, θα εννοούμε ότι υπάρχει** το όριο της f στο x_0 και είναι ίσο με ℓ.

Συνέπεια του ορισμού είναι οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$\boxed{\begin{array}{lll} (\alpha) & \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0 \\ (\beta) & \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell \end{array}}$$

Αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

• Αν μια συνάρτηση f **είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής** (x_0, β)**,** αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0), τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

• Αν μια συνάρτηση **f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής** (α, x_0)**,** αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β), τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α, β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

<u>Όριο ταυτοτικής - σταθερής συνάρτησης</u>

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} x = x_0} \qquad \boxed{\lim_{x \to x_0} c = c}$$

Όριο και διάταξη

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g **έχουν όριο στο** x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ **κοντά στο** x_0, τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Όρια και πράξεις

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ *καί* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_1 + \ell_2$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x)) = \kappa \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \kappa \ell_1$, για κάθε σταθερά $\kappa \in R$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right| = |\ell_1|$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[k]{\ell_1}$, εφόσον $f(x) \ge 0$ κοντά στο x_0.

Οι ιδιότητες 1 και 3 του θεωρήματος ισχύουν και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις. Άμεση συνέπεια αυτού είναι:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^\nu = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^\nu, \quad \nu \in N$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to x_0} x^\nu = x_0^\nu.$$

Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης

Έστω το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{και} \quad x_0 \in R.$$

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Για παράδειγμα, $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - 6x - 2) = 2^3 - 6\cdot 2 - 2 = -6$.

Όριο ρητής συνάρτησης

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in R$

—**Αν $Q(x_0)\neq 0$** τότε, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$. Επομένως,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)},\quad \text{εφόσον}\quad Q(x_0)\neq 0}$$

— **Αν $Q(x_0)=0$ και $P(x_0)=0$** τότε,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)P_1(x)}{(x-x_0)Q_1(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q_1(x)}=\frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)},\quad \text{αν } Q_1(x_0)\neq 0.$$

— **Αν $Q(x_0)=0$ και $P(x_0)\neq 0$** τότε, όπως θα δούμε παρακάτω, αν υπάρχει το όριο θα είναι μη πεπερασμένο.

Κριτήριο παρεμβολής

ΘΕΩΡΗΜΑ

> Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν
> - $h(x)\le f(x)\le g(x)$ **κοντά στο** x_0 και
> - $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$,
>
> τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

Τριγωνομετρικά όρια

Αποδεικνύεται ότι: **$|ημx|\le|x|$, για κάθε $x\in R$**

(η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$ και ***αν $x>0$ τότε $ημx<x$***)

Επίσης:

$$\lim_{x\to x_0} ημx = ημx_0 \qquad \lim_{x\to x_0} συνx = συνx_0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{συνx-1}{x}=0$$

Όριο σύνθετης συνάρτησης

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f\circ g$ στο σημείο x_0, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $\mathbf{u=g(x)}$.

2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\mathbf{u_0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ και

3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell=\mathbf{\lim\limits_{u\to u_0} f(u)}$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x)\neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=\lim_{u\to u_0} f(u).$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια τα όρια της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$ με τα οποία θα ασχοληθούμε θα είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη: “$g(x)\neq u_0$ κοντά στο x_0” και γι αυτό δεν θα ελέγχεται.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$.

---

2. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^2=0$ να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

---

3. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\left(f(x)\right)^2+\left(g(x)\right)^2\right]=0$ να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

---

4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\left(f(x)\right)+\left(g(x)\right)\right]=0=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\left(f(x)\right)\cdot\left(g(x)\right)\right]$ να δείξετε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

---

5. Αν για κάθε $\chi\in\Re$ ισχύει ότι $f(x)\leq 0\leq g(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\left(f(x)\right)-\left(g(x)\right)\right]=0$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΩΝ – ΡΙΖΕΣ - ΑΠΟΛΥΤΑ

1. Να υπολογισθούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-6x+5}$

iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^2-4}$ iv) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$ vi) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{x^3-3x^2-x+3}$

vii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha(x^2-1)+\beta(\chi^3-1)}{\chi^4-1}$, $\alpha\beta\neq 0$ viii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\nu-1}{\chi^\mu-1}$ $\mu,\nu\in N^*$

ix) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+4x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$ x) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-2x^4+x^2-x-2}{x^2-5x+6}$.

---

2. Να υπολογισθούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

iv) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2+5x-14}}$ v) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x}}{\sqrt{x+1}-2}$ vi) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt[3]{x+5}-2}$

vii) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+3-\sqrt{12x}}}$ viii) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\sqrt{\alpha x}-x}{x-\alpha}$ με α>0. ix) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

---

3. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το όριο της συνάρτησης f στο x_0.

i) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & x<2\\[2mm] \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}, & x>2\end{cases}$ στο $x_0=2$ ii) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & 0<x<1\\[2mm] \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}, & 1<x\end{cases}$ στο $x_0=1$

---

4. Να υπολογισθούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ ii) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$ vi) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}$

---

5. Να υπολογισθούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}{x-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt[3]{x^2-x+6}}{x-2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt[3]{x^2+x+2}-1}{x^2-4}$ iv) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x-3}}$

v) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$ vi) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x-\sqrt{x}-1}$

---

6. Να υπολογισθούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2+x+2|+|x+3|-8}{|x^2+x|-x-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-3x+2|+x-1}{|x^2-x|+x-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-2x-3|+|3-x|}{|x^2-4x+3|+x^2-6x+9}$ iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-4x+3|+2|x-1|}{x^2-1}$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^7-x+2|-2}{x-1}$ vi) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-1|-x-1}{|x+5|-2x-3}$

vii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-9|+|x-3|}{|x+2|-5}$ viii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9-|3-x|+|x^2-3x|}{\sqrt{x-3}}$

ix) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}+|x|}{\sqrt{x}-|x|}$ x) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{|x^3-3x^2+4|}{x^3+1}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

7. Να υπολογισθούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\eta\mu x+2x}{3x^3+2\eta\mu x-x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x^2}{x^2}$ iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+7}-3}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\eta\mu 3x}{2x-3\eta\mu 2x}$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{\eta\mu x}$ vi) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\text{-εφx}\right)$.

---

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\chi^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{2}{x}\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{\varepsilon\varphi x}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{3}{x}\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\eta\mu\dfrac{2}{x}\right)$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2}\cdot\eta\mu\dfrac{x^2+1}{x}\right)$.

---

9. Να βρείτε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x\sigma\upsilon\nu x}\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)$.

---

10. Να βρείτε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\eta\mu(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}$ ii) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\eta\mu x}{\pi-x}$.

---

11. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2}{1-\sigma\upsilon\nu x}, & x<0\\[2mm] \dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{1+x}-1}, & x>0\end{cases}$

Να προσδιορίσετε το $\alpha\in\Re$, ώστε να υπάρχει στο $\Re$ το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και να το υπολογίσετε.

---

12. Αν $|f(x)|\le x^2\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

---

13. Να βρείτε τα όρια:

A= $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\eta\mu^3\chi-\eta\mu^2\chi+2\eta\mu\chi-1}{2\eta\mu^3\chi-\eta\mu^2\chi+4\eta\mu\chi-2}$ B= $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\eta\mu(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(x-\pi)^2}$.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

14. Αν $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+x^2+3x]=4$, αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x^2+1}=-\dfrac{1}{2}$.

---

15. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+x^2-x+2\right)=3$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-2f(x)-3}{f^2(x)-1}=2.$$

---

16. Αν $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$ και $f(x)\neq 1$ κοντά στο 2 , να βρείτε τα όρια:

$A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)+5f(x)-6}{f^2(x)+2f(x)-3}$ $\quad$ $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left|f^2(x)-4\right|+\left|3-f(x)\right|-5}{f^2(x)-1}$.

---

17. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α,β ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ και η C_f να διέρχεται από το $A(2,\ 1)$, αν $f(x)=\begin{cases}x^2-\alpha x+\beta, & x<3\\ x^2+\beta x-\alpha, & x>3\end{cases}$

---

18. Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha x+\beta\sqrt{x}-2}{x-1}=-2$.

---

19. Αν α+β+γ=0 να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha x^{\mu}+\beta x^{\nu}+\gamma}{x-1}$, $\mu,\nu\in\mathbb{N}$.

---

20. Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x+x^2+x^3+\ldots+x^{\nu}\right)-\nu}{x-1}$.

---

21. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $2x+\eta\mu x\le f(x)\le 3x+x^2$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

---

22. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\left|f(x)-g(x)\right|\le\left|x^2g(x)\right|$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=3$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

---

23. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f^2(x)-6f(x)\le x^2-9$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

---

24. Για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι $3x-x^2 \le f(x) \le x^2+3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να υπολογίσετε:

α. το $f(0)$ **β.** το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **γ.** το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x^2+x}$.

---

25. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\ell\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2f(-x)}{x}=3$, να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(2x)}{x^2+f^2(x)}$.

---

26. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f^2(x)+g^2(x)\le ημ^2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

---

27. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f^2(x)+g^2(x)-2f(x)-6g(x)\right]=-10$ να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και ii) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

---

28. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ με την ιδιότητα:

$2f(x)ημx+x^2-2ημ^2x \le f^2(x) \le x^2+2f(x)ημx$, $\forall x\in\mathfrak{R}$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

---

29. Αν $\lim\limits_{x\to 1}[(x-1)f(x)]=5$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{x^2-3x+2}=4$, να υπολογιστεί το:

$\lim\limits_{x\to 1}(f(x).g(x))$.

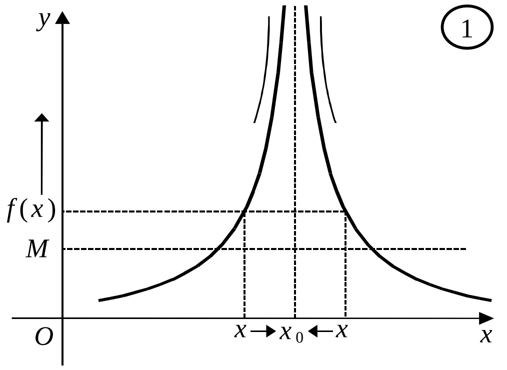
---

30. Αν για κάθε $x\ge 0$ ισχύει $2\sqrt{2x}\le f(x)\le x+2$, να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}$ iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{\sqrt{x+2}-2}$

iv) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-16}{x-2}$ v) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{f(x)+1}-\sqrt{5}}{x-2}$ vi) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f(x)-1|-3}{x^2-4}$

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ $x_0 \in R$

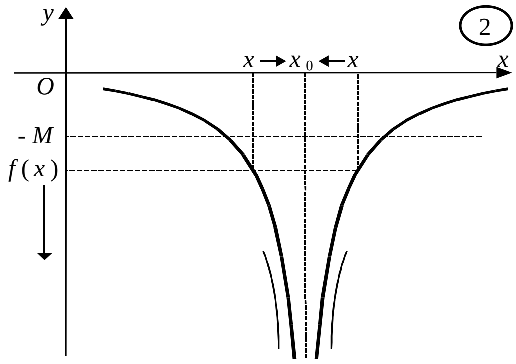


— Στο σχήμα 1 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0.

Παρατηρούμε ότι, ***καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα*** $x'x$ ***πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό*** x_0, ***οι τιμές*** $f(x)$ ***αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό Μ.***

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ***η συνάρτηση f έχει στο*** x_0 ***όριο*** $+\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$



— Στο σχήμα 2 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0.

Παρατηρούμε ότι, ***καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα*** $x'x$ ***πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό*** x_0, ***οι τιμές*** $f(x)$ ***ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό*** $-M$ $(M > 0)$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ***η συνάρτηση f έχει στο*** x_0 ***όριο*** $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Αποδεικνύονται οι παρακάτω **ιδιότητες**:

$$\begin{cases} \text{Αν } \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ ενώ} \\ \text{αν } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \text{ τότε } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Αν } \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \to x_0}(-f(x)) = -\infty, \text{ ενώ} \\ \text{αν } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \to x_0}(-f(x)) = +\infty. \end{cases}$$

- $\boxed{\text{Αν } \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0}$.
- $\boxed{\text{Αν } \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty}$, ενώ

  $\boxed{\text{αν } \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \text{ και } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty}$.

$$\begin{cases} \text{Αν } \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \text{ ή } -\infty, \text{ τότε } \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=+\infty. \\ \text{Αν } \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty, \text{ τότε } \lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)}=+\infty. \end{cases}$$

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty \quad \text{και γενικά} \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu}}=+\infty}, \quad \nu\in N$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty \quad \text{και γενικά} \quad \boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty}, \ \nu\in N \quad \text{ενώ} \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty \quad \text{και γενικά} \quad \boxed{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty}, \ \nu\in N \end{cases}$$

Επομένως, ***δεν υπάρχει στο μηδέν*** το όριο της $f(x)=\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu\in N$.

Για τα όρια αθροίσματος και γινομένου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0\in R$						
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$	$\alpha\in R$	$\alpha\in R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)=$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

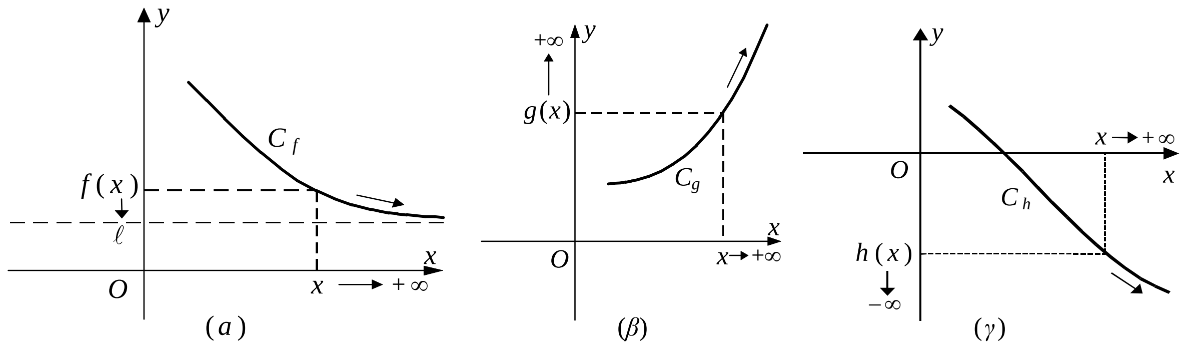
Αν στο $x_0\in R$,										
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)(x)=$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Απροσδιόριστες μορφές : $(+\infty)+(-\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$

$$0\cdot(\pm\infty), \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g, h σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.



(α) (β) (γ)

Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο,

— **το** $f(x)$ **προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό** ℓ**.** (Σχ.α).

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το ℓ και γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

— **το** $g(x)$ **αυξάνεται απεριόριστα**. (Σχ.β).

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η g έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

— **το** $h(x)$ **μειώνεται απεριόριστα**. (Σχ.γ).

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η h έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty \,.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, ***πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής*** $(\alpha,+\infty)$**.**

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν $x\to-\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.

Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω **βασικά όρια**:

$$\lim_{x\to+\infty} x^\nu = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0, \quad \nu\in N$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0, \quad \nu\in N.$$

Όριο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης

Για την **πολυωνυμική συνάρτηση** $\mathbf{P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0}$, με $\alpha_\nu\neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

Για τη **ρητή συνάρτηση** $\mathbf{f(x)=\dfrac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0}}$, $\mathbf{\alpha_\nu\neq 0,\ \beta_\kappa\neq 0}$

ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$$

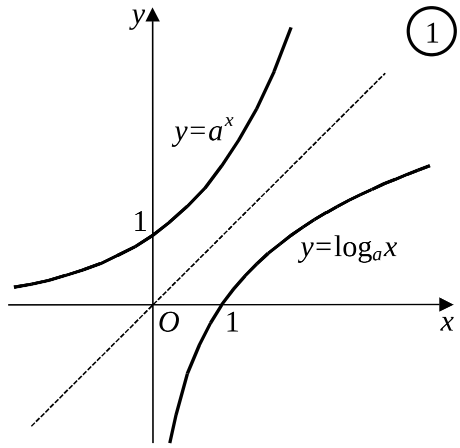
Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης

Αποδεικνύεται ότι:

- Αν $\mathbf{\alpha>1}$ (Σχ. 1), τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$$

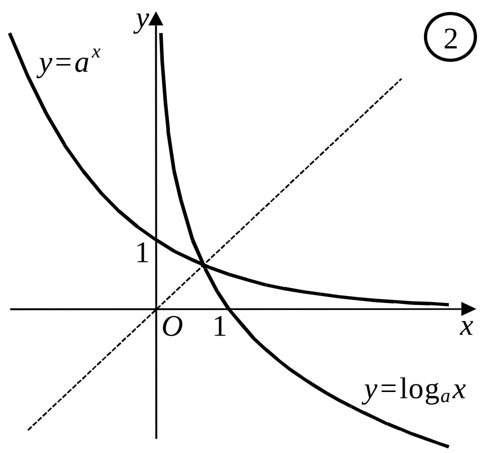
$$\lim_{x\to 0}\log_\alpha x=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x=+\infty$$



- Αν $\mathbf{0<\alpha<1}$ (Σχ. 2), τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\alpha^x=0$$

$$\lim_{x\to 0}\log_\alpha x=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x=-\infty$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} \varepsilon\varphi x$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-5}{x\eta\mu x}$ v) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x-3}{x-\eta\mu x}$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-15}{x^2-\eta\mu x^2}$

vii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-3}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ viii) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-3}{\sqrt{x-2}}$ ix) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-4}}$

---

2. Αν είναι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+2}, & \alpha\nu\ \chi>-2\\[2mm] \dfrac{-5}{(x+2)^3}, & \alpha\nu\ x<-2\end{cases}$ να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

---

3. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, αν:

i) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x-2}{f(x)}=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x-2}{f(x)}=-\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)(x^2-3x+1)\right]=-\infty$

---

4. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)-k}=+\infty$ ή $-\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k\in$R, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=k$.

---

5. Αν $\alpha\in\Re$ και $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-3\alpha x+3\alpha^2}-\alpha}{|x|-\alpha}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$.

---

6. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\Re$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, να αποδείξετε ότι:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\alpha^2 f(\alpha x)}{x}=+\infty$, α<0.

---

7. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16x^2+1}}{|x-3|}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x}-\frac{x^2-4}{x-1}\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4+4x^2+5}-x^2}{x+4}$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x-5|-|9-x^2|+2}{3x-6}$

---

8. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ όταν: i) $f(x)=e^{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}$, ii) $f(x)=e^{\frac{x^2+1}{x-2}}$

---

9. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}\cdot f(x)\right)=\frac{4}{5}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

---

10. Αν $\mu\in\Re$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, όταν $f(x)=\frac{\mu(x^2+x)-(2x^2+1)}{\mu^2x^2-4x(x+2)+1}$.

---

11. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x^k}$, $k\in N^*$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\eta\mu x+1}{x^2+\eta\mu\chi+5}$

---

12. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2x-3)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right]$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\,\eta\mu\frac{1}{x}\right)$ iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x}\,\eta\mu\frac{1}{x}\right)$ v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}-1}$

---

13. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(5^x-4^x)$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5^x-4^x)$ iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^x-\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^x}{4^x+5^x}$ v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2x+1}{\ln^2x-\ln x+1}$

---

14. Δίνεται η **περιττή** συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(3x-1)f(x)+x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right]=2$.

Να υπολογίσετε τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

---

15. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x+2)=0$, να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

---

16. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\Re$ έτσι ώστε :

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1})-\alpha x-\beta)=0$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha x+\beta-\frac{x^3+1}{x^2+1})=2$.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο** x_0, όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0, αφού

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0).$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ***μια συνάρτηση*** ***f δεν είναι συνεχής*** ***σε ένα σημείο*** x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

α) *Δεν υπάρχει το όριό της στο* x_0 **ή**

β) *Υπάρχει το όριό της στο* x_0, *αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της,* $f(x_0)$, *στο σημείο* x_0.

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

Βασικές συνεχείς συναρτήσεις.

— **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση *P* είναι συνεχής**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

— **Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής**, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

— **Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$$

— **Οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$ είναι συνεχείς.**

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Από τον ορισμό της συνέχειας στο x_0 και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις **f και g είναι συνεχείς στο** x_0**,** τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$\mathbf{f+g},\quad \mathbf{c\cdot f},\ \text{όπου}\ c\in R,\quad \mathbf{f\cdot g},\quad \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}},\quad |\mathbf{f}|\ \text{και}\ \sqrt[\nu]{\mathbf{f}}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

Οι συναρτήσεις $\boldsymbol{f(x)=}$ **εφ*x*** και $\boldsymbol{g(x)=}$ **σφ*x*** είναι **συνεχείς** ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων.

Προσοχή!

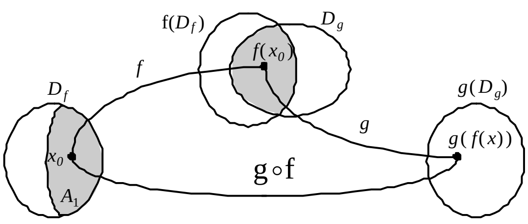
1) Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Μπορεί το άθροισμα ή το γινόμενο δύο συναρτήσεων να είναι συνεχής συνάρτηση, χωρίς απαραίτητα να είναι συνεχείς οι δύο συναρτήσεις.

2) Μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής, όταν υπάρχει σημείο $\mathbf{x_0}$ **του πεδίου ορισμού της,** στο οποίο διακόπτεται η γραφική της παράσταση.

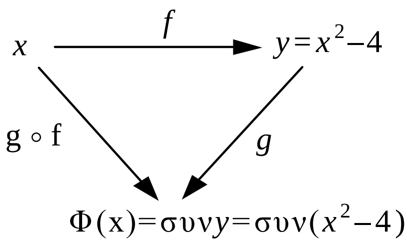
3) Αν το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f τότε δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για συνέχεια της f στο σημείο αυτό . Η f δεν χαρακτηρίζεται τότε **ούτε συνεχής**, **ούτε ασυνεχής** στο σημείο αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση ***f*** **είναι συνεχής στο** $\mathbf{x_0}$ και η συνάρτηση ***g*** **είναι συνεχής στο** $\mathbf{f(x_0)}$**,** τότε η σύνθεσή τους **gof είναι συνεχής στο** $\mathbf{x_0}$**.**



Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\phi(x)=\text{συν}(x^2-4)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x)=x^2-4$ και $g(x)=\text{συν}x$.

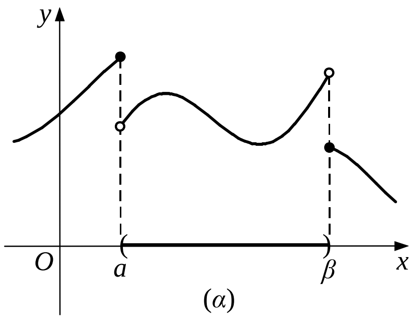


Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα

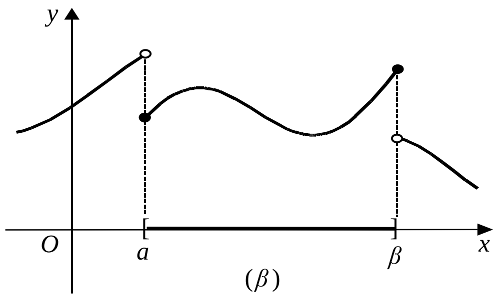
ΟΡΙΣΜΟΣ

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα** (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β). (Σχ.α)
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta) \quad (\Sigma\chi.\beta)$$



(α)

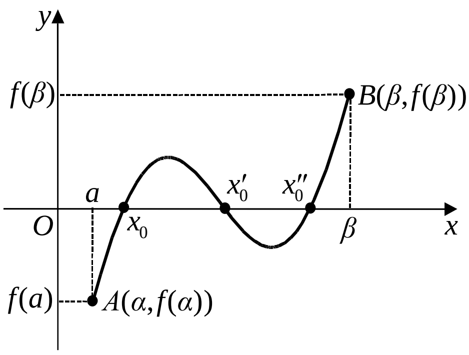


(β)

Θεώρημα του Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$.

Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.
Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- **η f είναι συνεχής στο [α,β]** και, επιπλέον, ισχύει
- $\mathbf{f(\alpha)\cdot f(\beta)<0}$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\mathbf{x_0 \in (\alpha,\beta)}$ ***τέτοιο, ώστε*** $\mathbf{f(x_0)=0}$.

Δηλαδή: υπάρχει ***μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης*** $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β), ή

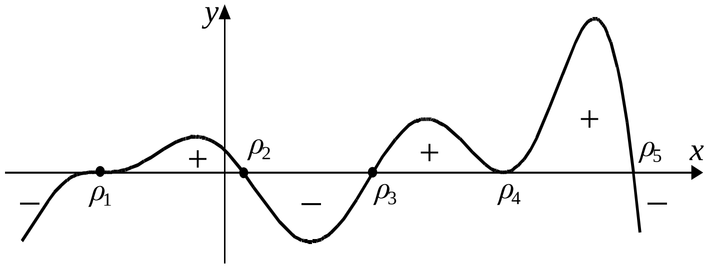
γεωμετρικά: η ***γραφική παράσταση της* f *τέμνει τον άξονα χ΄χ*** σε ένα τουλάχιστο σημείο στο (α,β).

ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f ***είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό,*** τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή **διατηρεί πρόσημο** στο διάστημα Δ.

— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Αυτό μας διευκολύνει στον ***προσδιορισμό του προσήμου της*** f ***για τις διάφορες τιμές του x.***

Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις **ρίζες της** f.

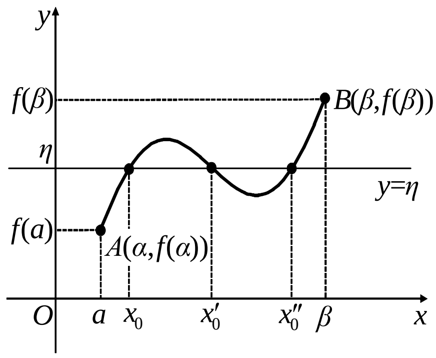
β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, **επιλέγουμε έναν αριθμό** και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- **η f είναι συνεχής στο** $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$



ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f ***δεν είναι συνεχής*** στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε **δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.**

- Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται ότι:

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

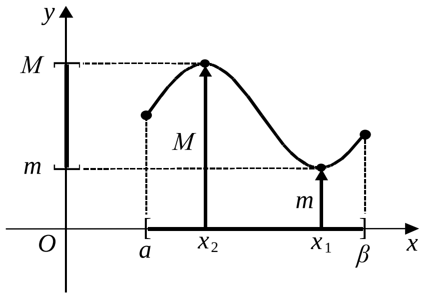
***ΘΕΩΡΗΜΑ** (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)*

Αν f είναι ***συνεχής συνάρτηση στο*** $[\alpha,\beta]$**,** τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια ***μέγιστη*** τιμή M και μια ***ελάχιστη*** τιμή m.

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε,

αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$\boldsymbol{m \le f(x) \le M}$**, για κάθε** $\boldsymbol{x \in [\alpha, \beta]}$.

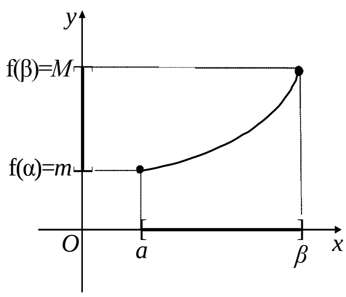


ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το ***σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το*** [α,β] είναι το κλειστό διάστημα $\boldsymbol{[m, M]}$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

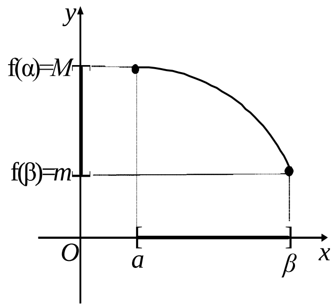
Κατά συνέπεια:

— Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα **κλειστό** διάστημα [α,β], τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα **[f(α),f(β)].**



— Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα **ανοικτό** διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα ($\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$).

— Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** σε ένα **κλειστό** διάστημα [α,β], τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα **[f(β),f(α)].**



— Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** σε ένα **ανοικτό** διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα ($\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια στο χ_0=0 οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|(x-1)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu 9\chi - \eta\mu 5\chi}{\chi}, & x \neq 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|\chi-1|-|\chi+1|}{\chi}, & x \neq 0 \\ -2, & x = 0 \end{cases}$

iv) $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x + \dfrac{\sqrt{2\eta\mu^2 x}}{\eta\mu x}, & x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sqrt{2}, & x = 0 \end{cases}$

---

2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις :

α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-x}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$, β) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x < 0 \\ x^5 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

---

3. Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x - \beta, & x \leq 1 \\ 3x, & 1 < x \leq 2 \\ \beta x^2 - \alpha, & x > 2 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των α , β$\in \mathbb{R}$ ώστε :

α) Η f να είναι συνεχής στο 1 και στο 2 .

β) Η f να είναι συνεχής στο 1 και ασυνεχής στο 2 .

---

4. Να προσδιορίσετε το α$\in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu\chi}{\pi-\chi} + 2\alpha - \chi, & x < \pi \\ \alpha\chi - 1, & x \geq \pi \end{cases}$

να είναι συνεχής στο χ_0=π.

---

5. Αν η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0=0 και f(0)=0, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x)\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο x_0=0.

---

6. Για τη συνάρτηση f είναι γνωστό ότι είναι συνεχής στο x_0 και ότι $f(x_0)=18$.

Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+13)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{x_0x+13}{x+18}\right)$ iii) $\lim\limits_{h\to1}\dfrac{f(x_0h)}{f\left(\dfrac{x_0}{h}\right)}$

---

7. Να αποδείξετε ότι αν οι f, f+g είναι συνεχείς στο χ_0 τότε και η g είναι συνεχής στο χ_0.

---

8. Να δώσετε ένα παράδειγμα ασυνεχών συναρτήσεων με άθροισμα συνεχή συνάρτηση.

---

9. Αν η σύνθεση gof είναι συνεχής και η g είναι συνεχής είναι η f συνεχής;

---

10. Έστω f συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα [α,β]. Να αποδείξετε ότι αν $f(x)\geq0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta)$ τότε ισχύει $f(\beta)\geq0$.

---

11. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και ισχύει $3x-x^2-2\leq(x-1)f(x)\leq x^2-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε την τιμή f(1).

---

12. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αν για κάθε $\chi\in R$ ισχύει

$\eta\mu2\chi-\chi^2\leq\chi f(\chi)\leq\eta\mu2\chi+\chi^2$ και η f είναι συνεχής στο $\chi_0=0$,να βρεθεί το f(0).

---

13. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο $x_0=0$ και για την οποία ισχύει $x\cdot f(x)+|\eta\mu\chi|\leq|x|$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή f(0).

---

14. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\ell,\ \ell\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

---

15. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f(0)=3$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-3-\varepsilon\varphi x}{x^2-x}=5$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

ii) Να βρείτε τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-3}{x}$ και β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|2f(x)-3|-3}{x}$.

---

16. Δίνεται η **περιττή** συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνεχής στο x_0=1 με $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=10$.

i) Να υπολογίσετε την τιμή f(1).

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x_1=-1.

iii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)+5}{x+1}$.

---

17. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2 με f(3)=10 και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει f(5-x)=f(x), τότε: i) Να προσδιορίσετε την τιμή f(2),

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0=3.

---

18. Δίνεται η **περιττή** συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,για την οποία ισχύει ότι :

$$2f(x)+x\text{συν}x=x+f(x)\sqrt{x^2+4} \quad \text{για κάθε } x\neq 0.$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

---

19. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,για την οποία ισχύει ότι $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$ για κάθε x,y$\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

---

20. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,για την οποία ισχύει: $f^5(x)+f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0=0.

---

21. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες :

Είναι συνεχής στο χ_0=0 και για κάθε $\chi_1,\chi_2\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Ρίζες σε ανοικτό διάστημα

22. Να δείξετε ότι :

α) Η εξίσωση $(x + 1)\, 2^{x+1} – 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(- 1, 0)$.

β) Η εξίσωση $x^3 – 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(- 1, 1)$.

γ) Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία στα συμπεράσματα των (α) και (β) .

---

23. Θεωρούμε την εξίσωση $5x^5 = – 25x +11$ (1) .

α) Αποδείξτε ότι η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0 , 1)$.

β) Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία στο (α) .

---

24. Αν $α,β,γ,δ\in \mathbb{R}_+$ με $0<γ<δ$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{α}{χ-γ}+\frac{β}{χ-δ}=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(γ,δ)$.

---

25. Αν $α,β\in \mathbb{R}$ με $β>0$ και $α+β<-1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $χ^3+αχ^2+β=0$ έχει δύο τουλάχιστο ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

---

26. Να αποδείξετε ότι οι γραφ. παραστάσεις των συναρτήσεων $f(χ)=χ^4+3χ^2+2$ και $g(χ)=-9χ^3-3χ+1$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστο σημείο $(χ_0,ψ_0)$ με $χ_0\in(-1,1)$.

---

27. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[α,β]$ με $f(α), f(β)\in(α,β)$, να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία ε: $y=x$.

---

28. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = (x – 1)e^x + \sqrt{x} + 5$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (0 , 1)$ τέτοιο ώστε: $f(x_o) = 5{,}1879$.

---

29. Έστω συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(0) = f(α)$, $α > 0$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε

$$f(ξ) = f\left(ξ + \frac{α}{2}\right) .$$

Ρίζες σε κλειστό διάστημα

30. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$, με $\alpha>0$ και $-\alpha\leq f(\chi)\leq\alpha$ για κάθε $\chi\in[-\alpha,\alpha]$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\chi_0\in[-\alpha,\alpha]$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)= -\chi_0$.

----

31. Αν οι f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύουν:

i) $f(x)\leq 0\leq g(x)$,$\forall x\in\mathbb{R}$ και ii) $f(\alpha)=\alpha$, $g(\beta)=\beta$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)+g(x_0)=x_0$.

----

32. Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα [0,1] και $f([0,1])=g([0,1])=[0,1]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f(f(\xi))+g(g(\xi))=2\xi$.

----

33. Αν για τη συνάρτηση $f: [0,1]\to\mathbb{R}$ ισχύουν $f([0,1]) =[0,1]$ και $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$ για κάθε $x,y\in[0,1]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα [0,1].

----

34. Αν η f είναι συνεχής στο [0,1] και $0\leq f(x)\leq 1$, $\forall\chi\in[0,1]$, να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[0,1]$, ώστε να ισχύει: $f^{2011}(\xi) + \xi = f(\xi)$.

----

35. Έστω f συνεχής στο $\Delta = [\alpha, \beta]$. Να δειχθεί ότι:

i) Η συνάρτηση $f(\alpha+\beta-\chi)$ είναι συνεχής στο Δ.
ii) Υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\xi\in\Delta$, ώστε να ισχύει: $f(\alpha+\beta-\xi) = f(\xi)$.

----

36 . Αν η f είναι συνεχής στο [0,4] και $f(0)= f(4)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in[0,4]$ με $\beta - \alpha = 2$ τέτοια, ώστε $f(\alpha)= f(\beta)$.

----

37. Αν η συνάρτηση $f : [\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής και $\alpha\beta>0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$, ώστε : $\dfrac{f(\xi)}{\alpha}=\dfrac{\beta}{\xi}$.

Θεωρήματα Ενδιάμεσων τιμών και Ελαχίστου - Μεγίστου.

38. Για μια συνεχή συνάρτηση f στο [0,1] ισχύει f(0) = 2 και f(1) = 4. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ που ανήκει στο (0,1) ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}.$$

---

39. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β].

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{3}$.

---

40. Έστω f συνεχής στο Δ = [α, β] και γ>0. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον

$\xi \in \Delta$, ώστε να ισχύει: $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+\gamma f(\beta)}{\gamma+1}$.

---

41. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και x_1 , x_2 , $x_3 \in [\alpha, \beta]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε : $2f(x_1) + 3f(x_2) + 5f(x_3) = 10f(\xi)$.

---

42. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$ με $\alpha<\gamma<\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$, ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+2f(\gamma)+3f(\beta)}{6}$.

---

43. Έστω $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha<\kappa<\lambda<\beta$ και μ,ν

θετικοί αριθμοί, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\dfrac{\mu f(\kappa)+\nu f(\lambda)}{\mu+\nu}$.

---

44. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, παίρνει μόνο ακέραιες τιμές και f(1)=2, να αποδείξετε ότι f(x) =2 για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

---

45. Έστω P(x) ένα πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 1. Να αποδείξετε ότι αν για μια συνεχή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει $P \circ f = 0$ τότε η f είναι σταθερή.

Σύνολο τιμών – Πρόσημο f(x)

46. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ell nx + e^x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

---

47. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα την x = 0 .

β) Να βρείτε το πρόσημο της f(x) .

---

48. Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε : $(f(x))^2 + f(x) = x^2 + 3x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η f είναι συνεχής , δείξτε ότι έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα (- 2 , - 1) .

---

49. Αν για κάθε x∈(-2,2) η f είναι συνεχής στο x και ισχύει $x^2+(f(x))^2=4$, να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα (-2,2). Αν επιπλέον f(0)=2, να βρεθεί ο τύπος της f στο διάστημα (-2,2).

---

50. Έστω $f:[-3,3]\to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, ώστε $x^2+(f(x))^2=9$. Να αποδείξετε ότι

$f(x)=\sqrt{9-x^2}$ για κάθε x∈[-3,3] **ή** $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$ για κάθε x∈[-3,3].

---

51. Για τη συνεχή συνάρτηση $f: (1,2)\to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι ισχύει :

$ln(x-1)+ln(2-x)=|ln2+f(x)|$. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο.

---

52. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f^2(x) - 1 = 2x\, f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g(x) = f(x)-x διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Αν f(0) =1, τότε:

i) να βρείτε το τύπο της f,

ii) να υπολογίσετε το όριο $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xf(x)\right)$.

Γενικές ασκήσεις

53. Για μια συνεχή συνάρτηση f, ισχύει ότι:

$f^3(\chi) + \beta f^2(\chi) + \gamma f(\chi) = \chi^3 - 2\chi^2 + 6\chi - 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό χ, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$.

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(\chi) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (0,1). (Θέμα Πανελλαδικών)

----

54. Αν για τον μιγαδικό αριθμό $z = \alpha+\beta i$ ισχύει: $|z| = \left|z+\frac{1}{z}\right|$, να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$.

ii. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος (i), αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι: υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. (Θέμα Πανελλαδικών)

----

55. i) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 ισχύει η ισοδυναμία: $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)=0$.

ii) Έστω μια συνάρτηση $f : [\alpha,\beta]\to\Re$, συνεχής στο διάστημα [α,β] και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha^2+if(\alpha)$ και $w =f(\beta)+i\beta^2$, με $\alpha\beta\neq0$.

Αν $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) =0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα [α,β]. (Α΄ Δέσμη 1995)

----

56. Έστω $f: [\alpha,\beta] \to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και οι μιγαδικοί αριθμοί

$z = \alpha+\beta i$, $z_1 = \alpha+if(\alpha)$, $z_2 = \beta+if(\beta)$.

Αν ισχύει $3\left(z^2-\overline{z}^2\right)-4iz\overline{z} = 4i\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z}_2\right)$, να δειχθεί ότι η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον άξονα χ΄χ.

----

57. Αν στο πολυώνυμο $P(x)= \alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ ισχύει $\alpha_0.\alpha_\nu<0$, τότε το P(x) έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.

----

58. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1] και f(0)=f(1) , να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) =f\left(x+\frac{1}{3}\right)$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο [0,1].

----

59. Στην Κρήτη και συγκεκριμένα στο Νομό Χανίων βρίσκεται το φαράγγι της Σαμαριάς που έχει χαρακτηρισθεί σαν Εθνικός Δρυμός με ιδιαίτερο φυσικό κάλος. Το μήκος του είναι 18 km και εκτείνεται από τον Ομαλό μέχρι την παραθαλάσσια Αγία Ρουμέλη.

Ένας πεζοπόρος ξεκινάει από τον Ομαλό στις 8.00 π.μ. και φτάνει στην Αγία Ρουμέλη στις 2μ.μ. Διανυκτερεύει εκεί και την άλλη μέρα ξεκινάει στις 8.00 π.μ. και επιστρέφει στον Ομαλό στις 2μ.μ. πάλι ακολουθώντας την ίδια διαδρομή.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο του φαραγγιού στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.

(**Προσοχή!** Αν αντέχουν τα πόδια σας, συστήνω ανεπιφύλακτα την διαδρομή από Ομαλό για Αγία Ρουμέλη, αλλά όχι την επιστροφή γιατί είναι ανηφόρα. Εξάλλου υπάρχει από Αγία Ρουμέλη καραβάκι που αφού κάνετε το μπάνιο σας στη θάλασσα σας μεταφέρει στα Σφακιά και από εκεί επιστρέφετε με λεωφορείο στα Χανιά ή οπουδήποτε αλλού).