

Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής 2009  
ΔΕΥΤΕΡΑ 18 Μαΐου 2009

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .  
(Μονάδες 10)
- B.** Αν  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$  ( $k \leq n$ ), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ .  
(Μονάδες 5)
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση .
- α.** Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f, g$  ισχύει ότι  $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g(x)$ .  
(Μονάδες 2)
- β.** Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε ισχύει ότι  $A - B = A \cap B'$ .  
(Μονάδες 2)
- γ.** Για τη συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu x$  ισχύει ότι  $(\eta \mu x)' = -\sigma \upsilon \nu x$  .  
(Μονάδες 2)
- δ.** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.  
(Μονάδες 2)
- ε.** Η μέση τιμή ενός συνόλου  $n$  παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.  
(Μονάδες 2)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές  $x_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4$  μιας μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες  $v_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ . Η συχνότητα  $v_2$  που αντιστοιχεί στην τιμή  $x_2=3$  είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με  $\bar{x} = 4$  .

$x_i$	$v_i$
2	6
3	;
5	3
8	4

- α.** Να αποδείξετε ότι  $v_2=7$ .  
(Μονάδες 9)
- β.** Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.  
(Μονάδες 9)
- γ.** Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής X είναι ομοιογενές . Δίνεται ότι  $\sqrt{4,9} \approx 2,2$ .  
(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$ , όπου  $a$  πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει  $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2, x \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να δείξετε ότι  $a=9$ .

(Μονάδες 7)

**β.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$ .

(Μονάδες 8)

**γ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $y=-3x$ .

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2, x > 0$  όπου  $\lambda$  ένας πραγματικός αριθμός.

**A. α.** Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

**β.** Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

**B.** Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης  $f(2), f(4), f(8), f(3)$  και  $f(5)$  είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$ .

**α.** Αν  $R$  είναι το εύρος και  $\delta$  η διάμεσος των παρατηρήσεων, ναδειχθεί ότι  $R = 3 + \ln \frac{1}{4}$  και  $\delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$ .

(Μονάδες 7)

**β.** Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$  ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το  $\lambda$  παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο  $\Omega$ , να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου  $A = \{\lambda \in \Omega \mid R + \delta < -2\}$ .

(Μονάδες 6)