

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ****ΕΞΕΤ. ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ –ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Γ. Π.****ΘΕΜΑ Α**

A₁. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B να δείξετε ότι ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (\text{απλός προσθετικός νόμος}).$$

Μονάδες 7

A₂. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της A ;

Μονάδες 4

A₃. Πως ορίζεται ο σταθμικός μέσος ενός συνόλου n παρατηρήσεων x_1, x_2, \dots, x_n με συντελεστές στάθμισης w_1, w_2, \dots, w_n αντίστοιχα;

Μονάδες 4

A₄. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 > x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- β)** Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι πραγματικός αριθμός.
- γ)** Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος είναι ένα μέτρο διασποράς.
- δ)** Αν για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου ισχύει ότι $P(A) \leq P(B)$ τότε θα είναι $A \subseteq B$.
- ε)** Αν για ένα ενδεχόμενο A ισχύει ότι η πιθανότητά του είναι $P(A)=0$, τότε το ενδεχόμενο αυτό είναι το κενό.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Η βαθμολογία των γραπτών 50 μαθητών κυμάνθηκε από 10 έως 20. Οι 50 βαθμοί χωρίστηκαν σε 5 κλάσεις ίσους πλάτους όπως στον παρακάτω πίνακα.

ΚΛΑΣΕΙΣ [,)	x_i	v_i	f_i %	F_i %
10-12				
12-14				
14-16				
16-18				
18-20				
ΣΥΝΟΛΟ				

Κατασκευάζοντας τα ιστογράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων καθώς και το κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων παρατηρήθηκε ότι:

- Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων το εμβαδόν του ορθογωνίου της κλάσης 10-12 ισούται με 5.
- Στο ιστόγραμμα σχετικών % συχνοτήτων, το ύψος του ορθογωνίου της κλάσης 16-18 είναι 20.
- Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, το τόξο που αντιστοιχεί στην κλάση 14-16 είναι 144° .
- Είναι επίσης γνωστό ότι οι μαθητές που το γραπτό τους βαθμολογήθηκε από 12 έως 14 είναι τετραπλάσιοι από τους μαθητές που το γραπτό τους βαθμολογήθηκε από 18 έως 20.

B₁. Να δείξετε ότι οι μαθητές με βαθμό από 18 έως 20 είναι 3.

Μονάδες 5

B₂. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

Μονάδες 5

B₃. Να βρεθεί η μέση τιμή του παραπάνω δείγματος.

Μονάδες 4

B₄. Να γίνει το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών % συχνοτήτων και να υπολογιστεί η διάμεσος του δείγματος.

Μονάδες 7

B₅. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν από τους παραπάνω μαθητές, να υπολογιστεί η πιθανότητα το γραπτό του να έχει βαθμολογηθεί με βαθμό μεγαλύτερο από 15.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2}{2} - \beta x$, $x \in \mathbb{R}$ και α, β να παίρνουν τιμές από το σύνολο

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Γ₁. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

Μονάδες 6

Γ₂. Επιλέγουμε ένα τυχαίο ζεύγος τιμών (α, β) από το σύνολο A (μπορούν και τα δύο να πάρουν την ίδια τιμή). Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων.

α) Β: « η παραπάνω εφαπτομένη (ε) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ ».

β) Γ: « η παραπάνω εφαπτομένη (ε) διέρχεται από το σημείο $\left(2, \frac{\alpha}{2}\right)$ ».

γ) Αν \mathbf{v} σημεία της παραπάνω εφαπτομένης έχουν τετμημένες $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ με μέση τιμή $\bar{x} = \frac{1}{2}$ και τυπική απόκλιση $S_x = 2$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

Δ: « οι τεταγμένες των παραπάνω σημείων έχουν συντελεστή μεταβολής $CV_y = 1$ ».

δ) Ε: « να πραγματοποιείται ένα τουλάχιστο από τα Β και Δ ενδεχόμενα ».

Μονάδες 12

Γ₃. Αν $\alpha=2$ και $\beta=2$ να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = e^x \cdot f(x)$ με $x \in \mathbb{R}$, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Μια βιομηχανία κατασκευάζει 4 τύπους λαμπτήρων σε ποσοστά 40%, 30%, 20%, 10%, με κόστος κατασκευής 3, 5, 7, 9 ευρώ αντίστοιχα για κάθε τύπο.

Δ1. Να υπολογιστεί η μέση τιμή του κόστους κατασκευής των λαμπτήρων.

Μονάδες 5

Δ2. Να υπολογιστεί ο συντελεστής μεταβολής του κόστους κατασκευής των λαμπτήρων.

Μονάδες 5

Δ3. Αν το κόστος κατασκευής για κάθε τύπο λαμπτήρα μειωθεί κατά 10% λόγω μείωσης του μισθού των εργαζομένων, να βρεθεί ο νέος συντελεστής μεταβολής του κόστους κατασκευής. Τι παρατηρείτε;

Μονάδες 5

Δ4. Επιλέγουμε τυχαία ένα λαμπτήρα. Έστω τα ενδεχόμενα:

A: « ο λαμπτήρας να παρουσιάσει βλάβη λόγω αστοχίας υλικού»

B: « ο λαμπτήρας να παρουσιάσει βλάβη από λάθος εργαζομένου».

Δίνεται ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν και τα δύο ενδεχόμενα είναι $\frac{1}{3}$ και οι πιθανό-

τητες $P(A \cup B)$ και $P(A - B)$ ανήκουν στο σύνολο $H = \{8/9, 3/2, \kappa\}$ με $\kappa = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - 3}{x^2 - x - 2}$

και $P(A \cup B) \neq P(A - B)$.

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cup B)$, $P(A - B)$, $P(A)$ και $P(B)$.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα ο λαμπτήρας να παρουσιάσει βλάβη λόγω αστοχίας υλικού ή να μη χαλάσει από λάθος εργαζομένου ισούται με την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστο από τα A και B.

Μονάδες 4

Δίνεται ο τύπος:
$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!