

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Μονάδες 4

A2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8,5

B1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0 .

β. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

γ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

Μονάδες 4,5

B2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0 .

Στήλη A συναρτήσεις	Στήλη B εφαπτόμενες
α. $f(x)=3x^3, \quad x_0=1$	1. $y=-2x+\pi$
β. $f(x)=\eta\mu 2x, \quad x_0=\frac{\pi}{2}$	2. $y=\frac{1}{4}x+1$
γ. $f(x)=3 x , \quad x_0=0$	3. $y=9x-6$
δ. $f(x)=\sqrt{x}, \quad x_0=4$	4. $y=-9x+5$
	5. δεν υπάρχει

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\frac{2z+i}{\bar{z}-2i}, z \in C$ με $z \neq -2i$, όπου \bar{z} ο συζυγής του z .

α. Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$$w_1=f(9-5i)$$

Μονάδες 6

$$w_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i) \right]^{2004}$$

Μονάδες 6

β. Θεωρούμε τον πίνακα $M = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} |w_1| & 0 \\ 0 & -|w_1| \end{bmatrix}$ όπου $|w_1|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού w_1 του ερωτήματος **α**.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός T με πίνακα M είναι:

A. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων O και γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$

B. συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$

Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$

Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία $y=x$

E. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων O και λόγο $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Μονάδες 5

γ. Αν M ο πίνακας του ερωτήματος **β**, τότε να βρεθεί ο πίνακας X ώστε να ισχύει:

$$MX=K$$

όπου K είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με

κέντρο την αρχή των αξόνων O και γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$, να δείξετε ότι:

α. η ευθεία $y=3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

Μονάδες 7

β. υπάρχει $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = \frac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$$

Μονάδες 12

γ. υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Τη χρονική στιγμή $t=0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, t \geq 0$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .

Μονάδες 15

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

Μονάδες 10