ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Μονάδες 12

Β.1. Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x) = \text{συν}x\ .$$

Μονάδες 8

Β.2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.

Μονάδα 1

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδα 1

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Μονάδα 1

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$$

Μονάδα 1

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0 .

Μονάδα 1

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} z$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α. Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

Μονάδες 7

β. Αν $|z| = \rho$ και $Arg(z) = \theta$, να δείξετε ότι

$$f(13) = \rho \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right].$$

Μονάδες 8

γ. Αν $|z| = 2$ και $Arg(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και $f(13)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:
$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Μονάδες 18

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β].
Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

Μονάδες 2

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:
$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

ι) Να εκφραστεί η f΄ ως συνάρτηση της f.

Μονάδες 5

ιι) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 12

ιιι) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) .$$

Μονάδες 6