ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

• η f είναι συνεχής στο [α, β] και

• $f(\alpha) \neq f(\beta)$ δείξτε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 9

Α.2 Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\big(g(x)\big)$

Μονάδες 2

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

Μονάδες 2

δ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = +\infty$

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x) - f(\alpha)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 2

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1,\ z_2,\ z_3$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$ **Μονάδες 7**

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός . **Μονάδες 9**

γ. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

Μονάδες 3

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

Μονάδες 7

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι $E(\lambda) = \dfrac{e-2}{2\lambda}$. **Μονάδες 8**

δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$2\, f'(x) = e^{x - f(x)}$ για κάθε $x \in$ IR και $f(0) = 0$.

α. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + e^x}{2}\right)$. **Μονάδες 6**

β. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x f(x - t)\, dt}{\eta\mu x}$.

Μονάδες 6

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)\, dt$ και $g(x) = \dfrac{x^{2007}}{2007}$.Δείξτε ότι h(x) = g(x) για κάθε $x \in$ IR .

Μονάδες 7

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)\, dt = \dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο (0 , 1).

Μονάδες 6