

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

**A.2** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει  $|z|^2 = z^2$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$  τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

**γ.** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Μονάδες 2**

**δ.** Ισχύει ο τύπος  $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

**ε.** Ισχύει η σχέση

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx, \text{ όπου } f', g' \text{ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο } [\alpha, \beta].$$

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 2 + (x-2)^2$  με  $x \geq 2$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

**Μονάδες 6**

**β.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$  και να βρείτε τον τύπο της.

**Μονάδες 8**

**γ. i.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  με την ευθεία  $y=x$ .

**Μονάδες 4**

**ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  και  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|.$

**Μονάδες 9**

**ii.**  $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$  και  $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$

**Μονάδες 8**

**β.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $z_1, z_2, z_3$  στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x.$

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f.$

**Μονάδες 8**

**β.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 5**

**γ.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x)=\ln x$  στο σημείο  $A(\alpha, \ln \alpha)$  με  $\alpha > 0$  και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h(x)=e^x$  στο σημείο  $B(\beta, e^\beta)$  με  $\beta \in \mathbb{R}$  ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός  $\alpha$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $f(x)=0.$

**Μονάδες 9**

**δ.** Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g$  και  $h$  έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

**Μονάδες 3**