

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Μονάδες 8

A.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

A.3 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

B. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε

$$\int_a^\beta f(x) dx > 0.$$

Μονάδες 2

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

Μονάδες 2

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε

$$\int_a^{g(x)} f(t) dt = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Μονάδες 2

ε. Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2 + ai}{a + 2i} \quad \text{με } a \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 9

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2 + ai}{a + 2i} \quad \text{για } a = 0 \text{ και } a = 2 \text{ αντίστοιχα.}$$

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 .

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^\nu$ για κάθε φυσικό αριθμό ν .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta \quad \text{όπου } \theta \in \mathbb{R} \quad \text{μα σταθερά με } \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. **Μονάδες 7**

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες. **Μονάδες 8**

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$. **Μονάδες 3**

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt, \quad x \in [0, 1], \quad G(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad x \in [0, 1].$$

α. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$. **Μονάδες 8**

β. Να αποδειχθεί ότι: $f(x) \cdot G(x) > F(x)$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$. **Μονάδες 6**

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$. **Μονάδες 4**

δ. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt \right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt \right)}{\left(\int_0^x g(t)dt \right) \cdot x^5}.$$

Μονάδες 7