ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει: $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$ **Μονάδες 10**

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν μια συνάρτηση $f:A\to R$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x))=x, x\in A$ *και* $f(f^{-1}(y))=y, y\in f(A)$

Μονάδες 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο C των μιγαδικών.

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$\left[\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right]=6 \text{ και } |w-(1-i)|=|w-(3-3i)|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z . **Μονάδες 6**

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w . **Μονάδες 7**

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$ **Μονάδες 6**

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{a}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο R για την οποία ισχύει

$$f(x)=\left(10x^3+3x\right)\int_0^2 f(t)dt-45$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$

Μονάδες 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο R . Να αποδείξετε ότι

$$g''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45 \quad \text{και} \quad g(0)=g'(0)=1, \text{ τότε}$$

i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1−1

Μονάδες 3