Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου 2009
Τετάρτη 20-5-2009

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(Μονάδες 10)

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(Μονάδες 2)

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 2)

γ. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

(Μονάδες 2)

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 2)

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει f(x)<0 για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Α.α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

(Μονάδες 8)

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$ όπου ο μιγαδικός αριθμός z_0 που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1), \quad x>-1$ όπου α>0 και $\alpha \neq 1$.

Α. Αν ισχύει $f(x)\geq 1$ για κάθε , x>-1 να αποδείξετε ότι α=e .

(Μονάδες 8)

Β. Για α=e,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή ,

(Μονάδες 5)

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-1 , 0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$,

(Μονάδες 6)

γ. αν β, γ $\in$ $(-1,0)\cup(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, 2) .

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt=0 \ .$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $H(x)=\int_0^x tf(t)dt, \quad x\in[0,2]$,

$$G(x)=\begin{cases} \dfrac{H(x)}{x}-\displaystyle\int_0^x f(t)dt+3, & x\in(0,2] \\ 6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x=0 \end{cases} .$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2].

(Μονάδες 5)

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει $G'(x)=-\dfrac{H(x)}{x^2}, 0<x<2$.

(Μονάδες 6)

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός α $\in$ (0, 2) τέτοιος ώστε να ισχύει Η(α)=0.

(Μονάδες 7)

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός ξ $\in$ (0, α) τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha\int_0^\xi tf(t)dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt \ .$$

(Μονάδες 7)