

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤ. ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

- A.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να δείξετε ότι:
- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $\mathbf{G(x) = F(x) + c}$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
 - κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή: $\mathbf{G(x) = F(x) + c}$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

- B.** Να γράψετε τον ορισμό του σημείου καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ τότε

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Μονάδες 2

- 2) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Μονάδες 2

- 3) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

Μονάδες 2

- 4) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

- 5) Αν f παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

Μονάδες 2**ΘΕΜΑ 2**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z , w για τους οποίους ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x + 2} - |z - i|x + |w + 3i| \right) = 1$$

- α) Να δείξετε ότι $|z - i| = 3$ και $|w + 3i| = \frac{5}{6}$.

Μονάδες 13

- β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της ποσότητας $|z - w|$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

β) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες και το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 9

γ) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) = 1 + \int_{x+1}^{2x} \frac{f(t-x)}{x} dt, \text{ για κάθε } x > 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \ln x + 1$.

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι η C_f είναι κοίλη.

Μονάδες 4

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της (ε) στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 4

δ) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f την εφαπτόμενη (ε) της C_f στο A και την ευθεία $x=e$.

Μονάδες 5

ε) Αν $0 < \alpha < \beta$ να δείξετε ότι $\ln\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) > \frac{1}{2} \cdot \ln(\alpha \cdot \beta)$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ