2^{O} ΓΕΛ. ΠΕΥΚΗΣ ΣΧ. ΕΤΟΣ 2010-11

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤ. ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 10

Β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.
Δώστε το ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος της συνάρτησης f από το α στο β , $\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)$.

Μονάδες 5

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1) Για κάθε $z \in C$ ισχύει $|z|^2 = z^2$

Μονάδες 2

2) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

Μονάδες 2

3) Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x με $x \in A$.

Μονάδες 2

4) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεση τους gof είναι συνεχής στο x_0

Μονάδες 2

5) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2

Έστω z_1 , z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+9=0$ με $z \in C$.

α) Να δείξετε ότι $z_1^{2011} + z_2^{2011} = 0$.

Μονάδες 8

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού w, για τον οποίο ισχύει:
$|w-z_1| + |w-z_2| = 10$.

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε ποιοι από τους αριθμούς w του ερωτήματος (β) έχουν το ελάχιστο και ποιοι το μέγιστο μέτρο.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-\alpha\cdot\ln x-1$, $x>0$ και $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 5

β) **i)** Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

ii) Για τις διάφορες τιμές του $\beta\in\mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\beta$.

Μονάδες 3

γ) Να δείξετε ότι $0<\dfrac{f(x)}{x-1}<e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x>1$.

Μονάδες 4

δ) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα $\chi'\chi$ και την ευθεία $x=e$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και

$$\int_0^{f(x)}\left(3t^2+1\right)dt=x,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x)=x^3+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα - κυρτά και σημεία καμπής.

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την εφαπτόμενή της C_f στο σημείο καμπής της και την ευθεία $x = 2$.

Μονάδες 7

δ) Αν $g(x)=\dfrac{1}{f^{-1}(x)}$ με $x\neq 0$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $g(t)\geq g(x)\geq g(t+1)$, για κάθε x που ανήκει στο $[t, t+1]$, με $t>0$.

Μονάδες 3

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $L=\lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_t^{t+1} g(x)dx$.

Μονάδες 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!