

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ****ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ****ΕΞΕΤ. ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ****ΘΕΜΑ Α**

**A<sub>1</sub>.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Να δείξετε ότι αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 7**

**A<sub>2</sub>.** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού  $A$  και  $B$  αντιστοίχως, δώστε τον ορισμό (πεδίο ορισμού και τύπο) της συνάρτησης  $g \circ f$ , δηλαδή της σύνθεσης της  $f$  με τη  $g$ .

**Μονάδες 4**

**A<sub>3</sub>.** Πότε λέμε ότι η ευθεία  $x = x_0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 4**

**A<sub>4</sub>.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Αν  $z, w \in \mathbb{C}$  και  $|z| = |w|$  τότε  $z = w$ .
- 2) Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι 1-1 σε ένα διάστημα  $\Delta$  τότε δεν είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό.
- 3) Κάθε συνεχής συνάρτηση  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ , παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$ .
- 4) Αν μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίζεται στο  $\mathbb{R}$  και έχει  $\kappa$  διαφορετικές ανά δύο ρίζες, τότε η παράγωγός της έχει  $\kappa - 1$  τουλάχιστο διαφορετικές ρίζες.
- 5) Αν  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$  και  $f(x) \geq 0$ , τότε θα είναι  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ , για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5x2=10**

## ΘΕΜΑ Β

Έστω  $z_1, z_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ , όπου  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  και για τους οποίους ισχύει ότι  $\beta^2 = 2\alpha\gamma \neq 0$ .

**B<sub>1</sub>.** Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί  $z_1, z_2$  δεν είναι πραγματικοί και ότι ισχύει:  $z_1^2 + z_2^2 = 0$ .

**Μονάδες 6**

**B<sub>2</sub>.** Να αποδείξετε ότι  $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ .

**Μονάδες 5**

**B<sub>3</sub>.** Αν  $A, B$  είναι οι εικόνες των  $z_1, z_2$  αντίστοιχα και  $O$  η αρχή των αξόνων να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AOB$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

**Μονάδες 7**

**B<sub>4</sub>.** Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό  $z$  ισχύει ότι:  $|z - z_1| + |z - z_2| \geq \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|$ .

**Μονάδες 4**

**B<sub>5</sub>.** Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο  $n$  ισχύει ότι:  $z_1^{4n+2} + z_2^{4n+2} = 0$ .

**Μονάδες 3**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x \ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}, & x > 0 \\ \frac{3}{2}, & x = 0 \end{cases}$

**Γ<sub>1</sub>.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής.

**Μονάδες 4**

**Γ<sub>2</sub>.** Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 6**

**Γ<sub>3</sub>.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $[0,1]$  και κοίλη στο  $[1, +\infty)$  και να βρεθεί το σημείο καμπής της.

**Μονάδες 5**

**Γ<sub>4</sub>.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο καμπής της.

**Μονάδες 3**

**Γ<sub>5</sub>.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  τον άξονα  $y'y$  και την εφαπτόμενη ( $\epsilon$ ) στο σημείο καμπής.

**Μονάδες 7**

## **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = 3ax^2 + \alpha \int_0^{\frac{x}{a}} e^{-at} f(x - at) dt$  με  $\alpha > 0$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγο συνάρτησή της.

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης  $f$  είναι  $f(x) = 3ax^2 + ax^3$ .

**Μονάδες 2**

**Δ3.** Αν  $g(x) = f(x) \cdot e^{-x}$  με  $x \in \mathbb{R}$ , να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $g$  όπου αυτές υπάρχουν.

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Αν  $\alpha = 1$  ορίζουμε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x) - 3x^2 + e^x$  με  $x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται και να δείξετε ότι η αντίστροφος  $h^{-1}$  έχει την ίδια μονοτονία με την  $h$ .

**Μονάδες 4**

**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $h^{-1}$ , τον άξονα  $\chi\chi$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=1+e$ .

**Μονάδες 5**

**γ)** Αν η συνάρτηση  $h^{-1}$  είναι παραγωγίσιμη να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_{h^{-1}}$  στο σημείο της με τετμημένη  $x=1$ .

**Μονάδες 4**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!**