2^{O} *ΓΕΛ. ΠΕΥΚΗΣ* *ΣΧ. ΕΤΟΣ 2013-14*

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤ. ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: Κ. ΜΥΛΩΝΑΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α$_1$. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και f(α) ≠ f(β) να δείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

Α$_2$. Πότε μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, λέμε ότι παρουσιάζει στο $\mathbf{x_0} \in \mathbf{A}$ τοπικό μέγιστο το $f(x_0)$.

Μονάδες 4

Α$_3$. Να διατυπώσετε το θεώρημα του **Fermat.**

Μονάδες 4

Α$_4$. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1) Αν $z, w \in C$ και $|z| + |w| = 0$ τότε $z = w = 0$.

2) Μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0, έναν πραγματικό αριθμό ℓ. Αναγκαστικά το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

3) Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε δεν είναι 1 - 1.

4) Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε δεν μπορεί να έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο αυτό.

5) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση και $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Έστω ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει η σχέση $\left|z - \frac{1}{8}i\right| = \left|\mathrm{Im}(z) + \frac{1}{8}\right|$, (1).

Β$_1$. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η παραβολή $y = 2x^2$, (2).

(7 μονάδες)

Β$_2$. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 και $-\overline{z_1}$ με $z_1 \neq 0$ που ικανοποιούν την (1) και έχουν εικόνες Α και Β αντίστοιχα. Να βρείτε τον μιγαδικό z_1 ώστε το τρίγωνο ΑΟΒ να είναι ορθογώνιο. (Ο είναι η αρχή του συστήματος).

(6 μονάδες)

Β$_3$. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς z της (1) έχει εικόνα που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο Ρ(9,0).

(7 μονάδες)

Β$_4$. Αν η εικόνα Μ(x,y) του μιγαδικού z κινείται στην παραπάνω παραβολή (2), να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0)=\frac{1}{4}$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του Μ. **(5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $3f(x) = \int_0^x e^{t-f(t)}dt$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \ell n\dfrac{e^x+2}{3}$.

(7 μονάδες)

Γ2. Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την $\boldsymbol{f^{-1}}$, (πεδίο ορισμού και τύπο).

(6 μονάδες)

Γ3. Να δείξετε ότι η ***f*** είναι κυρτή και να αποδείξετε ότι $f(x) > \dfrac{x}{3}$ για κάθε $x \neq 0$.

(6 μονάδες)

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\varepsilon\varphi x}$.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, για την οποία ισχύει

$$f'(x) > f(x) \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq e^x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

(8 μονάδες)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2014$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

(4 μονάδες)

Δ3. Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι κυρτή να αποδείξετε ότι $f(2x) < \dfrac{f(3x)+f(x)}{2}$ για κάθε $x>0$.

(5 μονάδες)

Δ4. Αν είναι $F(x)=\int_0^x \dfrac{f(t)}{f(t)+f(x-t)}dt$ να δείξετε ότι $F(x)=\dfrac{x}{2}$ με $x \in [0, +\infty)$ **(4 μονάδες)** και στη συνέχεια να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=e^x \cdot F(x)$ τους άξονες χ΄χ , ψ΄ψ και την ευθεία χ=1. **(4 μονάδες)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!