

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**  
**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΕΞΕΤ. ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A<sub>1</sub>.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε να δείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

**Μονάδες 10**

**A<sub>2</sub>.** Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 5**

**A<sub>3</sub>.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Αν  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  τότε  $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$ .

2) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι αντιστρέψιμη στο  $A$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in A$ , τότε η  $f^{-1}$  δεν ορίζεται στο 0.

3) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  ώστε  $f(x_0) = 0$ , τότε θα ισχύει:  $f(\alpha)f(\beta) < 0$ .

4) Αν η συνάρτηση  $h(x) = f(g(x))$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  τότε και οι  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ .

5) Αν  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση και  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ , τότε θα είναι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**Μονάδες 5x2=10****ΘΕΜΑ Β**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  όπου  $0 < \alpha < \beta$  και οι μιγαδικοί αριθμοί  $z, w$  με

$z = \alpha + if(\alpha)$  και  $w = \beta + if(\beta)$  για τους οποίους ισχύει ότι  $\frac{z}{w} = \lambda \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι:

**B<sub>1</sub>.**  $|z + iw| = |z - iw|$ .

**Μονάδες 7**

**B<sub>2</sub>.**  $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta}$ .

**Μονάδες 7**

**B<sub>3</sub>.** υπάρχει ένα τουλάχιστο  $\xi \in (\alpha, \beta)$  ώστε να ισχύει  $f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi}$ .

**Μονάδες 5**

**B<sub>4</sub>.** υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$  στο οποίο η εφαπτόμενη να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln x}, & 0 < x \leq \frac{1}{e} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  και  $F(x) = \int_{\frac{1}{e}}^x f(t) dt$ .

Γ<sub>1</sub>. Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι το διάστημα  $[-1, 0]$ .

**Μονάδες 6**

Γ<sub>2</sub>. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $F(x)$ , να μελετηθεί η ως προς τη μονοτονία της και να δείξετε ότι  $F(x) \geq 0$ .

**Μονάδες 4**

Γ<sub>3</sub>. Να αποδείξετε ότι η  $F$  είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 5**

Γ<sub>4</sub>. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $F$  στο σημείο της με τεταμένη  $x_0 = \frac{1}{e}$ .

**Μονάδες 5**

Γ<sub>5</sub>. Να αποδείξετε ότι ισχύει  $\int_{\frac{1}{e}}^x f(t) dt + x \leq \frac{1}{e}$ , για κάθε  $x \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$ .

**Μονάδες 5**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Δ<sub>1</sub>. Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της αν υπάρχουν.

**Μονάδες 4**

Δ<sub>2</sub>. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε το πρόσημό της.

**Μονάδες 4**

Δ<sub>3</sub>. Να αποδείξετε ότι ισχύει  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} < \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt < \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 5**

Δ<sub>4</sub>. Να υπολογίσετε το όριο  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$ .

**Μονάδες 4**

Δ<sub>5</sub>. Δίνεται η συνάρτηση  $G(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ . Να δείξετε ότι η  $G$  ορίζεται στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει ότι  $G(x) = F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

Δ<sub>6</sub>. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $F$  του ερωτήματος Δ<sub>2</sub> τους άξονες  $x'x$ ,  $y'y$  και την ευθεία  $x=1$ .

**Μονάδες 4**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!**