

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f

β) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f

γ) Να βρείτε το σημείο στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και να υπολογίσετε το ακρότατο αυτό.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + \sqrt{2}$$

α. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

δ. Να υπολογίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

3. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

α. Να την εξετάσετε ως προς την μονοτονία.

β. Να βρείτε σε ποιο σημείο η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και να το υπολογίσετε.

4. Η χωρητικότητα σε λίτρα των πνευμόνων ενός ανθρώπου ηλικίας x ετών δίνεται από τη

$$\text{συνάρτηση } f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x + 4, \quad 10 \leq x \leq 35.$$

Σε ποια ηλικία οι πνεύμονες του ανθρώπου έχουν τη μέγιστη χωρητικότητα;

8. Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -3t^2 + 30t, \quad \text{όπου } 0 \leq t \leq 10$$

α) Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο τη χρονική στιγμή $t=0$;

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t .

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.

δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + \alpha x + \beta \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

β) Αν $f'(1) = 0$ και $f(2) = 5$, να βρείτε τα α και β .

γ) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο ερώτημα (β), να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

10. Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα:

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -x^2 + 200x. \quad \text{Μονάδες 5}$$

- β) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;
γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η πρώτη παράγωγος έχει τύπο: $f'(x) = x^2 - 2x$.

α) Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$ και $f'(2) = 0$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε την $f''(x)$.

δ) Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει ακρότατα και ποιο είναι το είδος των ακρότατων;

12. Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή των μέτρων εκτιμάται ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση $N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$, $0 \leq t \leq 10$, όπου t ο χρόνος σε έτη.

α) Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων ($t = 0$);

β) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.

γ) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.

δ) Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη;

13. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 4x^3 - 12x + 2006, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρεθεί η παράγουσα της f .

β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

14. Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50cm.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδό E της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2} x(50-x), \quad 0 < x < 50.$$

β) Για ποια τιμή του x το εμβαδό $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του $E(x)$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + kx + \lambda$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ και το σημείο $A(1, 0)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση,

α. να δείξετε ότι $k = -2$ και $\lambda = 1$.

β. να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο f'' της f .

γ. να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) + f'(x) + f''(x) > 0.$$

18. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος f' της f .
- β. Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ. Να δειχθεί ότι $f(x) > 2008$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , όπου $x \in [1, +\infty)$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + \lambda x - 2 - \lambda$, όπου $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0, -5)$ και η συνάρτηση f για $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε:

- α. Να βρείτε τις τιμές των k και λ
- β. Για $k=2$ και $\lambda=3$,
 - i. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
 - ii. να βρείτε την τιμή και το είδος των ακροτάτων της f .

2009 ΕΠΑΛ (ημερήσια) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x^2 + 6x + 8$

- A) Να υπολογίσετε την $f'(x)$
- B) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
- Γ) Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο; Να βρείτε το είδος του ακροτάτου.

2009 ΓΕΝΙΚΑ (ημερήσια) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$, όπου a πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2, x \in \mathbb{R}$$

- α. Να δείξετε ότι $a=9$
- β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$

2009 ΓΕΝΙΚΑ (εσπερινά) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$.
- β. Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα.
- γ. Να βρείτε τα ακρότατα της f .

2009 ΤΕΕ (ημερήσια) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + \lambda x - 2 - \lambda$, όπου $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0, -5)$ και η συνάρτηση f για $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε:

- α. Να βρείτε τις τιμές των k και λ
- β. Για $k=2$ και $\lambda=3$,
 - i. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
 - ii. να βρείτε την τιμή και το είδος των ακροτάτων της f .

2009 ΤΕΕ (εσπερινά) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - 3x + 2$

- α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f
- β. Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f
- γ. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a για την οποία ισχύει $(a-1)f'(0) + 4f''(1) = 27$

2010 ΕΠΑΛ (ημερήσια) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + ax + \beta$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, τότε:

- Δ1.** Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β .
- Δ2.** Για $a=6$ και $\beta=1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Δ3.** Για $a=6$ και $\beta=1$, να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f .

2010 ΕΠΑΛ (εσπερινά) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = ax^2 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Αν $f'(2) = -2$, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό a .
- Δ2.** Για $a = -1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

2010 ΤΕΕ (ημερήσια) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(x) = x^2 - 3x + \lambda$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$, να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ .

Για $\lambda=2$,

- Δ2.** να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και το είδος των ακροτάτων,
- Δ3.** να συγκριθούν μεταξύ τους οι τιμές της συνάρτησης για $x_1=6/5$ και $x_2=3/2$, καθώς επίσης και οι τιμές της συνάρτησης για $x_3=4$ και $x_4=6$.

2010 ΤΕΕ (εσπερινά) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \alpha + \frac{1}{3}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

Δ1. Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της f

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x)}{x+1}$

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Δ4. Εάν το τοπικό μέγιστο της f είναι τριπλάσιο από το τοπικό της ελάχιστο, να βρείτε τον αριθμό α .