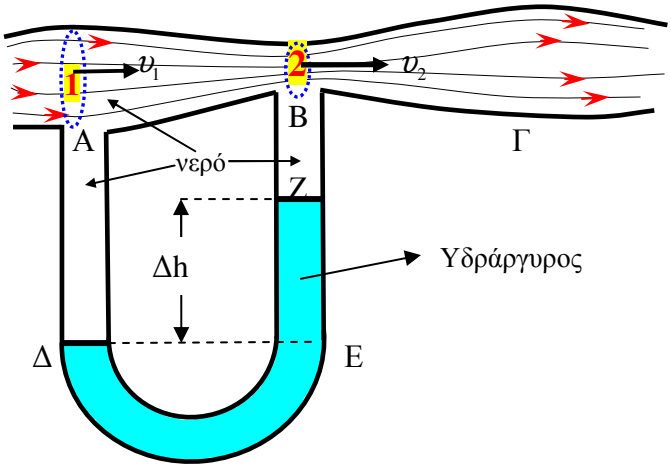
Ροόμετρο Venturi και υψομετρική διαφορά….

Το διπλανό σχήμα παριστάνει ένα ροόμετρο Venturi, (βεντουρίμετρο) που αποτελείται από τον οριζόντιο σωλήνα ΑΒΓ ο οποίος παρουσιάζει στένωση στο σημείο Β. Το ροόμετρο συνδέεται με ένα σωλήνα τύπου U στα σημεία Α και Β. Το κύριο μέρος του σωλήνα U που συνδέει τα σημεία Α και Β περιέχει υδράργυρο η πυκνότητα του οποίου είναι $\rho_{\upsilon\delta}$=13.600kg/m^3. Στο ροόμετρο διέρχεται νερό η πυκνότητα του οποίου είναι ρ_ν=1000kg/m^3.



Η μεγάλη διατομή του ροομέτρου στο Α έχει ακτίνα R και η μικρή που παρουσιάζει τη στένωση στο Β είναι r=R/2. Υποθέστε ότι η ταχύτητα του νερού στο σημείο 1 είναι υ_1=1,5m/s.

α) Υπολογίστε την τιμή της ταχύτητας υ_2 του νερού στο σημείο 2.

β) Να εξηγήσετε που οφείλεται η υψομετρική διαφορά Δh που παρουσιάζει ο υδράργυρος στον σωλήνα U.

γ) Υπολογίστε την υψομετρική διαφορά Δh που παρουσιάζει ο υδράργυρος.

δ) Αν η πίεση στο σημείο 1 ήταν 1Atm να υπολογιστούν οι ταχύτητες που θα έπρεπε να έχει το νερό στα σημεία 1 και 2 ώστε η πίεση στο 2 να ήταν μηδέν.

Δίνεται 1Atm=10^{5}N/m^2 και ότι το νερό και υδράργυρος συμπεριφέρονται σαν ιδανικά ρευστά. Επίσης τα σημεία 1 και 2 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

Απάντηση

α) Από την εξίσωση της συνέχειας και επειδή το νερό είναι ασυμπίεστο έχουμε:

$$S_A\upsilon_1 = S_B\upsilon_2 \Rightarrow \pi R^2\upsilon_1 = \pi r^2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{R^2}{r^2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2\upsilon_1 = \left(\frac{2r}{r}\right)^2 1,5 \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = 6m/s \quad (1)$$

β) Η υψομετρική διαφορά που παρουσιάζει ο υδράργυρος οφείλεται στις διαφορετικές πιέσεις που παρουσιάζει το νερό στις διατομές Α και Β. Από την εξίσωση του Bernoulli προκύπτει ότι στο σημείο 1 η πίεση είναι μεγαλύτερη από ότι στο 2. Έτσι το νερό στο σημείο Α πιέζει τον υδράργυρο προς τα κάτω. Αντίθετα στο Β η πίεση είναι μικρότερη και έτσι ο υδράργυρος ανεβαίνει προς το Β.

γ) Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli στα σημεία 1 και 2 έχουμε:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_\nu\upsilon_1^2 + \rho_\nu g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_\nu\upsilon_2^2 + \rho_\nu g y_2 \xRightarrow{y_1=y_2} p_1 + \frac{1}{2}\rho_\nu\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_\nu\upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho_\nu\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) \quad (2)$$

Το τμήμα του υδραργύρου βρίσκεται σε ισορροπία. Σύμφωνα με την αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων αν πάρουμε δύο σημεία Δ και Ε που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο εντός του ίδιου υγρού, θα ισχύει $p_\Delta = p_E$. Αρχικά δεν θα λάβουμε υπόψην την πίεση που οφείλεται στο νερό της στήλης ΑΔ και ΒΖ. (σχόλιο 2)

$$p_\Delta = p_E \Rightarrow p_1 = p_2 + \rho_{\upsilon\delta} g\Delta h \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho_{\upsilon\delta} g\Delta h \quad (3)$$

$$(2)\overset{(3)}{\Longrightarrow}\frac{1}{2}\rho_\nu\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) = \rho_{\upsilon\delta} g\Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2}\frac{\rho_\nu}{\rho_{\upsilon\delta} g}\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1000}{13.600\cdot 10}\left(6^2 - 1,5^2\right)$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{1}{272}(36 - 2,25) = \frac{33,75}{272} \Rightarrow \Delta h = 0,124m \Rightarrow \Delta h = 12,4cm$$

δ) Από την εξίσωση της συνέχειας και επειδή το νερό είναι ασυμπίεστο έχουμε:

$$S_A\upsilon = S_B\upsilon' \Rightarrow \pi R^2\upsilon_1 = \pi r^2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{R^2}{r^2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2\upsilon_1 = \left(\frac{2r}{r}\right)^2\upsilon_1 \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = 4\upsilon_1 \quad (4)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli στα σημεία 1 και 2 έχουμε:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_\nu\upsilon_1^2 + \rho_\nu g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_\nu\upsilon_2^2 + \rho_\nu g y_2 \underset{p_2=0}{\overset{y_1=y_2}{\Longrightarrow}} p_1 + \frac{1}{2}\rho_\nu\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}\rho_\nu\upsilon_2^2 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}\rho_\nu\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)\overset{(4)}{\Longrightarrow}$$

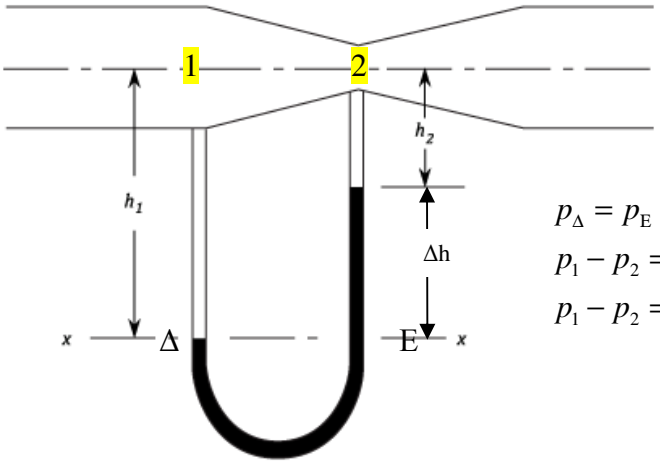
$$p_1 = \frac{1}{2}\rho_\nu\left(16\upsilon_1^2 - \upsilon_1^2\right) \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}\rho_\nu 15\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2p_1}{15\rho_\nu}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10^5}{15\cdot 1000}} = \sqrt{\frac{200}{15}} = \sqrt{\frac{40}{3}} \Rightarrow \upsilon_1 \simeq 3,65m/s$$

άρα υ_2 =14,6 m/s

Σχόλια

1. Το φαινόμενο στο Β όταν η πίεση πέφτει σχεδόν στο μηδέν, είναι γνωστό σαν σπηλαίωση, (cavitation). Το νερό εξατμίζεται σχηματίζοντας μικρές φυσαλίδες.

2. Στον υπολογισμό της διαφοράς ύψους του ερωτήματος **γ** αγνοήσαμε την πίεση του νερού στις στήλες ΑΔ και ΒΖ. Αυτό συνήθως γίνεται διότι η διαφορά αυτή επιφέρει μικρή αλλαγή στην πίεση p_Δ και p_E και τελικά μικρή απόκλιση στο Δh. Αν το ρευστό που διαρρέει το ροόμετρο έχει πολύ μικρή πυκνότητα σε σχέση με το υγρό του σωλήνα U, ή ο σωλήνας δεν είναι πολύ μακρύς ώστε τελικά η πίεση αυτή να πρέπει να ληφθεί υπόψη, τότε πρακτικά δεν παρατηρείται μεγάλη αλλαγή. Π.χ. αν το ροόμετρο διαρρεόταν από αέρα, ρ_{air}=1,3kg/m^3 και ο σωλήνας U από υδράργυρο, $\rho_{\upsilon\delta}$=13.600 kg/m^3 ακόμη και με μακρύ σωλήνα δεν θα το λαμβάναμε υπόψη.



Έστω ότι το ροόμετρο διαρρέεται από νερό και ο σωλήνας περιέχει υδράργυρο. Τότε:

$$p_\Delta = p_E \Rightarrow p_1 + \rho_\nu g h_1 = p_2 + \rho_\nu g h_2 + \rho_{\upsilon\delta} g (h_1 - h_2) \Rightarrow$$
$$p_1 - p_2 = \rho_{\upsilon\delta} g (h_1 - h_2) - \rho_\nu g (h_1 - h_2) \Rightarrow$$
$$p_1 - p_2 = \rho_{\upsilon\delta} g \Delta h - \rho_\nu g \Delta h \Rightarrow p_1 - p_2 = (\rho_{\upsilon\delta} - \rho_\nu) g \Delta h$$

Χ. Αγριόδημας
chagriodimas@yahoo.gr
chagriodimas@gmail.com