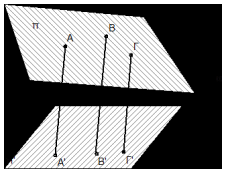


Είδαμε στην ενότητα με τους ευκλείδειους μετασχηματισμούς ότι ένα «δύσκολο» πρόβλημα μπορεί με χρήση μετασχηματισμών να έχει μια κομψή λύση. Το ίδιο ισχύει και για μια σειρά άλλα προβλήματα που κάνουμε χρήση αφιννικών ή προβολικών μετασχηματισμών.

Παράλληλη προβολή.

Αν π και π? δύο διακεκριμένα επίπεδα στο χώρο τότε παράλληλη προβολή του π στο π΄ κ ατά διεύθυνση ευθείας α (που δεν είναι παράλληλη στο π ή στο π?) θα ονομάζουμε το μετασχηματισμό που απεικονίζει τυχών σημείο Π του π σε σημείο Π? του π? ώστε η ευθεία ΠΠ?
να είναι παράλληλη στην α (σχήμα κάτω). Ένας τέτοιος μετασχηματισμός απεικονίζει κάθε σχήμα Φ του π σε ένα σχήμα Φ? του π?. Παράδειγμα τέτοιου μετασχηματισμού είναι η

εικόνα ενός ανοικτού παραθύρου από τον ήλιο στο πάτωμα του δωματίου.



Οι παράλληλες προβολές έχουν τις εξής ιδιότητες

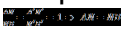
1. Απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες.
2. Απεικονίζουν παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες.
3. Διατηρούν το λόγο των εμβαδών αντιστοίχων σχημάτων.
4. Διατηρούν τον απλό λόγο σε 3 συνευθειακά σημεία ή σε τμήματα που βρίσκονται σε παράλληλες.

Ισχύει το ακόλουθο βασικό θεώρημα:
Αν δοθεί επίπεδο π και 3 μη συνευθειακά σημεία Α,Β,Γ πάνω σε αυτό και επίπεδο π? και τρία μη συνευθειακά σημεία Α? , Β? ,Γ? σε αυτό, τότε τα επίπεδα μπορούν να τοποθετηθούν έτσι ώστε να υπάρχει παράλληλη προβολή από το π στο π? που να απεικονίζει το Α στο Α΄, το Β στο Β΄και το Γ στο Γ?.
Συνήθως θεωρούμε ότι τα επίπεδα π και π΄ ταυτίζονται, οπότε αναφερόμαστε σε αφινικές ή ομοπαραλληλικές απεικονίσεις. (Κάθε αφινική απεικόνιση είναι σύνθεση μιας παράλληλης προβολής και μιας ομοιότητας.) Τότε οι ιδιότητες παραπάνω διαμορφώνονται ως εξής: Οι αφινικές απεικονίσεις,

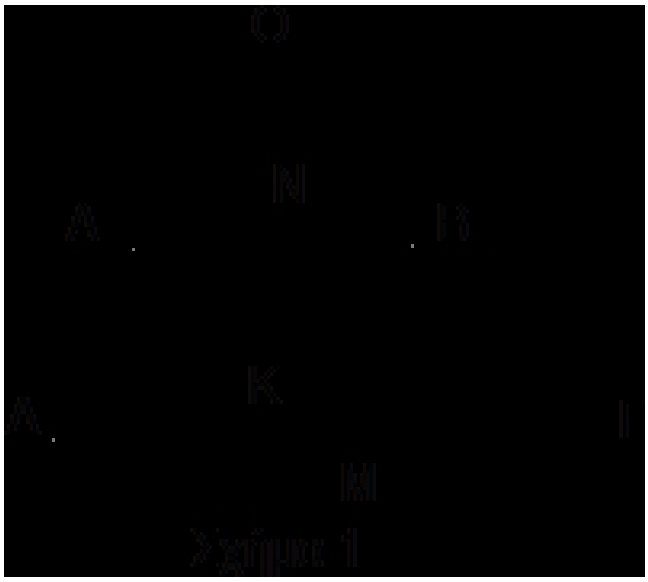
1. Απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες.
2. Απεικονίζουν παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες.
3. Διατηρούν το λόγο των εμβαδών αντίστοιχων σχημάτων.
4. Διατηρούν τον απλό λόγο 3 συνευθειακών σημείων ή δύο τμημάτων σε παράλληλες ευθείες.
5. Αν δοθούν δύο τριάδες μη συνευθειακών σημείων Α, Β, Γ και Α?, Β?, Γ? υπάρχει μοναδική αφιννική απεικόνιση που απεικονίζει το Α στο Α?, το Β στο Β? και το Γ στο Γ?.
6. Οι αφινικές απεικονίσεις αποτελούν ομάδα. Δηλαδή η σύνθεσή τους και η αντίστροφή τους είναι πάλι αφινική απεικόνιση.

Για την επίλυση προβλημάτων με αφινικές απεικονίσεις έχουμε την εξής τακτική: Απεικονίζουμε (με αφινική απεικόνιση) κατάλληλα δεδομένα του προβλήματος και το αρχικό πρόβλημα μεταφράζεται σε ένα πιο απλό ή σε μια μερική περίπτωση του αρχικού. Λύνουμε το δεύτερο πρόβλημα οπότε έχουμε λύσει και το αρχικό. Παράδειγμα: Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η ευθεία που ενώνει το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών τραπεζίου με το σημείο τομής των διαγωνίων του, διέρχεται από τα μέσα των δύο βάσεων. (Σχήμα 1) Τότε θεωρούμε αφινική απεικόνιση που απεικονίζει το τρίγωνο ΟΔΓ σε ισοσκελές τρίγωνο Ο?Δ?Γ? (Ό΄Δ΄= Ο΄Γ΄). Η ευθεία ΑΒ απεικονίζεται σε Α?Β? παράλληλη της Δ?Γ? και αφού Ο?Δ? = Ο?Γ? είναι ΟΆ΄=Ο΄Β΄ και Α?Δ? = Β?Γ?. Άρα έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα μόνο για το ισοσκελές τραπέζιο. (σχήμα 2) Στο ισοσκελές τραπέζιο όμως η Ο΄Κ΄ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ?Ο?Γ? (Τα τρίγωνα Ο?Α΄Κ? και Ο΄Β΄Κ΄ είναι ίσα) , άρα και μεσοκάθετος των Α? Β? και Δ΄Γ΄ (αφού τα τρίγωνα είναι ισοσκελή). Συνεπώς το Ν? είναι μέσο του Α΄Β΄ και το ίδιο και το Μ? στο Δ?Γ? . Αφού όμως

οι αφιννικές απεικονίσεις διατηρούν τον απλό λόγο (στην ίδια ευθεία) θα έχουμε :



και όμοια ΔΜ =ΜΓ.





Η παραπάνω μέθοδος θα μας βοηθήσει να λύσουμε τα ακόλουθα τρία προβλήματα:

- {ln: nw: Πρόβλημα 1 παράλληλες προβολές ' Πρόβλημα 1}
- {ln: nw: Πρόβλημα 2 παράλληλες προβολές ' Πρόβλημα 2}
- {ln: nw: Πρόβλημα 3 παράλληλες προβολές ' Πρόβλημα 3}