



Η αντιστροφή ως προς κύκλο (συχνά αναφέρετε και ως ανάκλαση ως προς κύκλο) είναι ο μετασχηματισμός ο οποίος αν δοθεί κύκλος (O, ρ) απεικονίζει τυχόν σημείο P του επιπέδου στο σημείο P' της ημιευθείας OP ώστε $OP \cdot OP' = \rho^2$. (Το O απεικονίζεται στο επ? άπειρον σημείο.) Συχνά λέμε απλά αντιστροφή κέντρου O και εννοούμε σε κύκλο με κέντρο O . Η αντιστροφή αποδεικνύεται ότι υλοποιεί την ανάκλαση και συνεπώς κάθε ισομετρία στα μοντέλα της υπερβολικής γεωμετρίας. Πριν μιλήσουμε για τις ιδιότητές της να πούμε ότι ορίζουμε σαν γωνία κύκλου και ευθείας ή δύο κύκλων την γωνία μεταξύ εφαπτομένης και ευθείας στα σημεία τομής ή των δύο εφαπτομένων στο (στα) σημείο τομής. Είναι φανερό ότι αν έχουμε δύο σημεία τομής η γωνία είναι η ίδια. Θα λέμε συνεπώς ότι, δύο κύκλοι τέμνονται κάθετα (ή είναι ορθογώνιοι), αν οι εφαπτόμενές τους στα σημεία τομής είναι κάθετες. Επίσης μια ευθεία θα είναι κάθετη σε έναν κύκλο αν είναι διάμετρός του.

Οι ιδιότητές της που θα μας φανούν χρήσιμες είναι:

1. Η αντιστροφή απεικονίζει κύκλους που διέρχονται από το κέντρο της αντιστροφής σε ευθείες που δεν διέρχονται από το κέντρο.
2. Απεικονίζει ευθείες που δεν διέρχονται από το κέντρο αντιστροφής σε κύκλους

που διέρχονται από το κέντρο.

3. Απεικονίζει κύκλους που δεν διέρχονται από κέντρο σε κύκλους που δεν διέρχονται από το κέντρο.

4. Αφήνει αναλλοίωτους (όχι σημειακά) τους ορθογώνιους ως προς τον κύκλο αντιστροφής κύκλους.

5. Αφήνει αναλλοίωτες ευθείες που διέρχονται από το κέντρο της αντιστροφής, όχι όμως σημειακά αναλλοίωτες.

6. Διατηρεί τις γωνίες μεταξύ κύκλων και ευθειών.

7. Διατηρεί τον διπλό λόγο τεσσάρων συνευθειακών (ή ομοκυκλικών σημείων).

8. Αν P' και Σ' οι εικόνες μέσω αντιστροφής σε κύκλο (O, ρ) , των P, Σ τότε το $OP\Sigma$ είναι όμοιο με το $O\Sigma'P'$ (τα σημεία είναι αντίστοιχα) και ισχύει : $P'\Sigma' = \rho^2 P\Sigma / (OS \cdot OP)$

Για να επιδείξουμε τη δύναμη των χειρισμών με αντιστροφή ας αποδείξουμε το γνωστό θεώρημα του Πτολεμαίου, δηλαδή ότι σε εγγράψιμο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει : $AB \cdot \Gamma\Delta + B\Gamma \cdot \Delta A = A\Gamma \cdot B\Delta$.

Απόδειξη

Θεωρούμε αντιστροφή σε κύκλο κέντρου A . Τότε ο περιγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου απεικονίζεται σε ευθεία (που δεν διέρχεται από το A). Άρα τα σημεία B', Γ', Δ' είναι συνευθειακά και ισχύει $B'\Delta' = B'\Gamma' + \Gamma'\Delta'$ ή $\rho^2 B\Delta / (AB \cdot A\Delta) = \rho^2 B\Gamma / (AB \cdot A\Gamma) + \rho^2 \Gamma\Delta / (A\Gamma \cdot A\Delta)$, άρα $A\Gamma \cdot B\Delta = B\Gamma \cdot \Delta A + AB \cdot \Gamma\Delta$. Αξίζει να πούμε ότι αν τα $AB\Gamma\Delta$ δεν είναι ομοκυκλικά τότε τα B', Γ', Δ' δεν είναι συνευθειακά άρα $B'\Delta' < B'\Gamma' + \Gamma'\Delta'$ και όμοια με παραπάνω $A\Gamma \cdot B\Delta < B\Gamma \cdot \Delta A + AB \cdot \Gamma\Delta$. Δηλαδή αποδείξαμε και το αντίστροφο.

Σχολιάζοντας να πούμε ότι η κλασσική απόδειξη με ομοιότητα δεν είναι τόσο κομψή όπως αυτή. Αυτό είναι χαρακτηριστικό της αντιστροφής, προσφέρει κομψές λύσεις. (όπως και όλοι οι μετασχηματισμοί). Δείτε για παράδειγμα το [πρόβλημα του Απολλώνιου](#) ή το [θεώρημα του Feuerbach](#).

Στον ιστό έχουμε τρία σύντομα προβλήματα με αντιστροφή.

- {In: nw: Πρόβλημα 1 αντιστροφή ' Πρόβλημα 1}
- {In: nw: Πρόβλημα 2 αντιστροφή ' Πρόβλημα 2}
- {In: nw: Πρόβλημα 3 αντιστροφή ' Η Αρβυλος του Πάππου }

Για να «παιξουν» τα applets πατήστε το εικονίδιο με το σύννεφο. Και για τα τρία δόθηκαν λύσεις χωρίς αντιστροφή. Αν θέλετε μπορείτε να δοκιμάσετε , για να κάνετε τη σύγκριση.