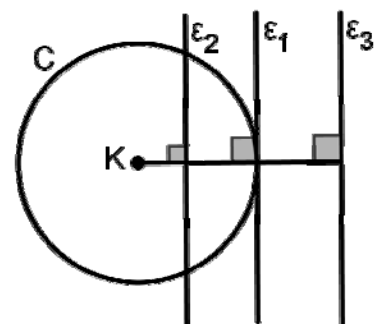
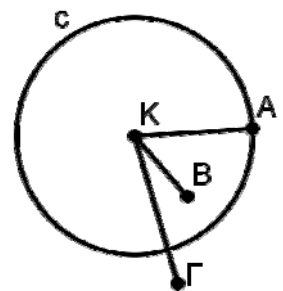


1. Εξίσωση κύκλου κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας ρ :

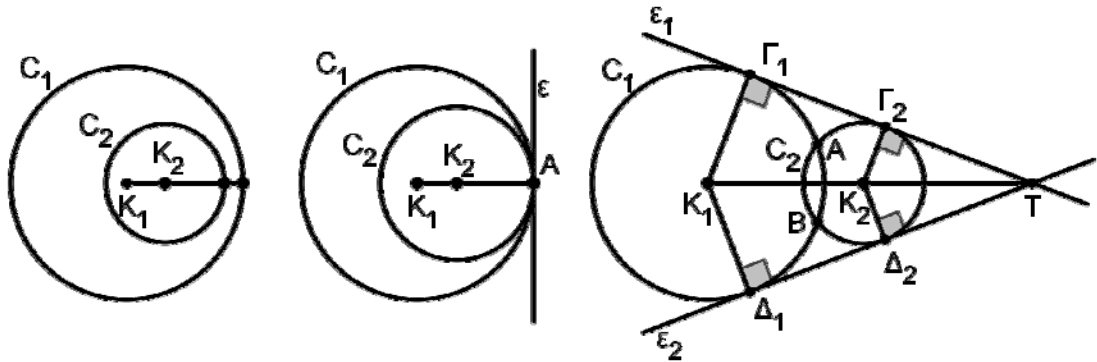
$$x^2 + \psi^2 = \rho^2.$$
2. Εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου C : $x^2 + \psi^2 = \rho^2$ σε σημείο του $A(x_1, \psi_1)$: $x_1x + \psi_1\psi = \rho^2.$
3. Εξίσωση κύκλου κέντρου $K(x_0, \psi_0)$ και ακτίνας ρ :

$$(x - x_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2 = \rho^2.$$
4. Η εξίσωση $x^2 + \psi^2 + Ax + B\psi + \Gamma = 0$ (1), $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$.
 - α) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ η εξίσωση (1) έχει άπειρες λύσεις. Στη περίπτωση αυτή παριστάνει κύκλο κέντρου $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνας $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}.$
 - β) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση την $(x, \psi) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, οπότε παριστάνει ένα μόνο σημείο το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right).$
 - γ) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν σημεία $M(x, \psi)$ που οι συντεταγμένες τους να την επαληθεύουν.
5. **Σχετικές θέσεις σημείου και κύκλου.**
 Ας θεωρήσουμε κύκλο C με κέντρο K και ακτίνα ρ . Αν A, B, Γ είναι οποιαδήποτε σημεία του επιπέδου του κύκλου, τότε:
 - α) $A \in C \Leftrightarrow (KA) = \rho.$
 - β) B εσωτερικό του $C \Leftrightarrow (KB) < \rho.$
 - γ) Γ εξωτερικό του $C \Leftrightarrow (K\Gamma) > \rho.$
6. **Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου.**
 Ας θεωρήσουμε κύκλο C με κέντρο K και ακτίνα ρ . Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι τρεις ευθείες του επιπέδου του κύκλου C , τότε:
 - α) ε_1 εφαπτομένη του $C \Leftrightarrow d(K, \varepsilon_1) = \rho.$
 - β) ε_2 τέμνουσα του $C \Leftrightarrow d(K, \varepsilon_2) < \rho.$



γ) ε_3 εξωτερική του $C \Leftrightarrow d(K, \varepsilon_3) > \rho$.

7. Σχετικές θέσεις δυο κύκλων $C_1 : (K_1, \rho_1)$ και $C_2 : (K_2, \rho_2)$.



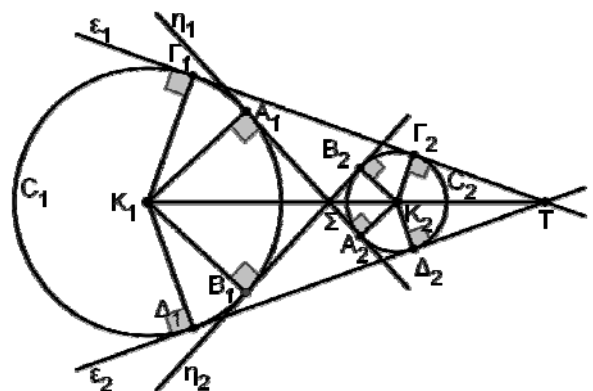
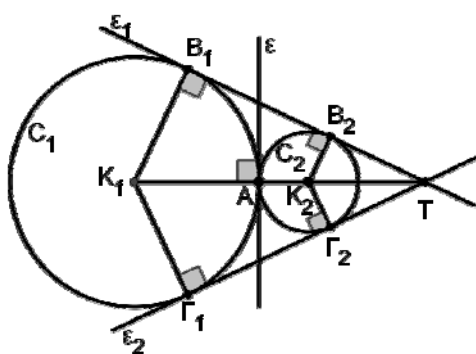
α) Ο C_2 εντός του $C_1 \Leftrightarrow (K_1 K_2) < \rho_1 - \rho_2$ εφόσον $\rho_1 > \rho_2$.

β) Ο C_2 εφάπτεται εσωτερικά του $C_1 \Leftrightarrow (K_1 K_2) = \rho_1 - \rho_2$ εφόσον $\rho_1 > \rho_2$.

Στην περίπτωση αυτή οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη, την ευθεία ε .

γ) C_1, C_2 τέμνονται $\Leftrightarrow |\rho_1 - \rho_2| < (K_1 K_2) < \rho_1 + \rho_2$.

Στην περίπτωση αυτή οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν δυο κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες τις ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι συμμετρικές ευθείες ως προς άξονα συμμετρίας τη διάκεντρο $K_1 K_2$. Εφόσον οι ε_1 και ε_2 τέμνονται το σημείο τομής τους T βρίσκεται πάνω στη διάκεντρο $K_1 K_2$.



δ) C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά $\Leftrightarrow (K_1 K_2) = \rho_1 + \rho_2$.

Στην περίπτωση αυτή οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν δυο κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες τις ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι συμμετρικές ευθείες ως προς άξονα συμμετρίας τη διάκεντρο $K_1 K_2$ και μια κοινή εσωτερική εφαπτομένη η οποία διέρχεται από το σημείο

επαφής A . Εφόσον οι ε_1 και ε_2 τέμνονται το σημείο τομής τους T βρίσκεται πάνω στη διάκεντρο K_1K_2 .

ε) Ο C_2 εκτός του $C_1 \Leftrightarrow (K_1K_2) > \rho_1 + \rho_2$.

Στην περίπτωση αυτή οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν δυο κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες τις ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι συμμετρικές ευθείες ως προς άξονα συμμετρίας τη διάκεντρο K_1K_2 .

Επίσης έχουν και δυο κοινές εσωτερικές εφαπτόμενες τις η_1 και η_2 οι οποίες είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τη διάκεντρο K_1K_2 .

Οι ε_1 , ε_2 , εφόσον τέμνονται, καθώς και οι η_1 , η_2 τέμνονται στα σημεία T και Σ αντιστοίχως που βρίσκονται πάνω στη διάκεντρο K_1K_2 .

• ΑΣΚΗΣΗ 1η.

Ας συμβολίσουμε με C τον μοναδιαίο κύκλο.

- α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε το σημείο $M\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)$ να ανήκει στον κύκλο C .
- β) Να βρείτε την σχετική θέση των σημείων $A\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ και $B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ ως προς τον κύκλο C .
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του C στο σημείο $A(\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$.

• ΑΣΚΗΣΗ 2η.

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(2, 3)$ και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y + 11 = 0$.

• ΑΣΚΗΣΗ 3η.

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(4, 1)$, $B(2, -3)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: x + y + 1 = 0$.

• ΑΣΚΗΣΗ 4η.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 8$ η οποία σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 8.

• ΑΣΚΗΣΗ 5η.

Δίνεται ο κύκλος $C: 4x^2 + 4y^2 = 3$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x\sqrt{3} - 3\psi - 3 = 0$ εφάπτεται του κύκλου C .
- β) Να βρείτε το σημείο τομής M της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ και στη συνέχεια την άλλη εφαπτομένη του κύκλου C από το σημείο M .
- γ) Αν A και B είναι τα σημεία επαφής των εφαπτομένων του κύκλου C από το σημείο M , να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB .
- δ) Να βρείτε την προβολή K του σημείου M πάνω στην χορδή AB .
- ε) Ποιο είναι το συμμετρικό του σημείου M ως προς την χορδή AB ;
- στ) Να βρείτε την οξεία γωνία των εφαπτομένων του κύκλου C από το σημείο M .

• ΑΣΚΗΣΗ 6η.

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + \psi^2 - 6x + 2\psi - 10 = 0$.

- α) Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέτρου του κύκλου C , της οποίας το ένα άκρο είναι το σημείο $A(1, 3)$.
- β) Ποιο είναι το άλλο άκρο της διαμέτρου του ερωτήματος (α);

• ΑΣΚΗΣΗ 7η.

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + \psi^2 - 4x + 2\psi - 20 = 0$ και το σημείο του $A(6, -4)$. Να βρείτε:

- α) Την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A .
- β) Την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A .
- γ) Το συμμετρικό K' του κέντρου K του κύκλου C ως προς την εφαπτομένη του στο σημείο A .

• ΑΣΚΗΣΗ 8η.

Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda: x^2 + \psi^2 - 4\lambda x - 2\lambda\psi + \frac{9\lambda^2}{2} - \lambda - \frac{1}{2} = 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, με $\lambda \neq -1$ η εξίσωση C_λ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων C_λ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, με $\lambda \neq -1$.

• ΑΣΚΗΣΗ 9η.

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + \psi^2 - 2x = 0$. Να βρείτε τη σχετική θέση των παρακάτω ευθειών ως προς τον κύκλο C .

- α) $\varepsilon_1: 3x - 4\psi + 3 = 0$ β) $\varepsilon_2: 3x - 4\psi + 1 = 0$
- γ) $\varepsilon_3: 3x - 4\psi + 2 = 0$

• ΑΣΚΗΣΗ 10η.

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x\eta\mu\theta + \psi\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta$ και

$\varepsilon_2 : x\sigma\upsilon\nu\theta - \psi\eta\mu\theta = \eta\mu\theta$. Να αποδείξετε ότι:

- α) οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται.
- β) το σημείο τομής M των ε_1 και ε_2 ανήκει σε κύκλο.
- γ) αν μια ευθεία η τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία A και B , τότε $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

• ΑΣΚΗΣΗ 11η.

Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + \psi^2 = 3$ και η ευθεία $\varepsilon : x + \psi + 4 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία ε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- β) Από ένα τυχαίο σημείο M της ε φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA και MB στον κύκλο C όπου A, B είναι τα σημεία επαφής. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB διέρχεται από σταθερό σημείο.

• ΑΣΚΗΣΗ 12η.

Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των κύκλων $C_1 : x^2 + \psi^2 = 4$ και

$$C_2 : (x - 4)^2 + \psi^2 = 4.$$

• ΑΣΚΗΣΗ 13η.

Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου $C : x^2 + \psi^2 - 2x - 6\psi + 9 = 0$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

• ΑΣΚΗΣΗ 14η.

Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda : (x - 1)^2 + (\psi - 2)^2 = 2\lambda(x + 2\psi - 5)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση C_λ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων C_λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \neq 0$.
- γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ διέρχονται από σταθερό σημείο.
- δ) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_λ έχουν κοινή εφαπτομένη την οποία να βρείτε.

• ΑΣΚΗΣΗ 15η.

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$, $B(1, 4)$ και $\Gamma(3, 0)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει:

$$|\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma}|$$

• ΑΣΚΗΣΗ 16η.

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + \psi^2 = 4$ και η χορδή του AB με $A(1, \mu)$, $\mu > 0$. Όταν το σημείο B κινείται, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{BA}$.

• ΑΣΚΗΣΗ 17η.

Δίνονται τα σημεία $A(1, 5)$, $B(5, -2)$ και $\Gamma(-3, -3)$.

A. Αν $M(x, \psi)$ είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου, να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{M\Gamma}^2 \geq 70$.

β) Αν ισχύει $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{M\Gamma}^2 = 85$, τότε το σημείο M κινείται σε κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

B. α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $P(3, 1)$ ανήκει στον κύκλο C .

β) Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο $P(3, 1)$.

Γ. Δίνεται το σημείο $T(0, 3)$.

α) Να δείξετε ότι το σημείο T είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C .

β) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου C που φέρνουμε από το σημείο T .

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες του κύκλου C που φέρνουμε από το σημείο T .

• ΑΣΚΗΣΗ 18η.

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + \psi^2 = 4$. Να βρείτε τη σχετική θέση:

α) του σημείου $A(1, 3)$ ως προς τον κύκλο C .

β) της ευθείας $\varepsilon: 3x + 4\psi - 5 = 0$ ως προς τον κύκλο C .

γ) του κύκλου $C_1: (x-3)^2 + \psi^2 = 1$ ως προς τον κύκλο C .

• ΑΣΚΗΣΗ 19η.

Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2 + \psi^2 - 6x + 8\psi = 0$ και

$$C_2: x^2 + \psi^2 - 8x - 6\psi + 16 = 0.$$

α) Δείξτε ότι οι εξισώσεις C_1 και C_2 είναι εξισώσεις κύκλων των οποίων να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα τους.

β) Δείξτε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 τέμνονται.

- γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων C_1 και C_2 .

• ΑΣΚΗΣΗ 20η.

Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : (x+1)^2 + (\psi+3)^2 = 9$ και

$$C_2 : (x-2)^2 + (\psi-1)^2 = 4.$$

- α) Δείξτε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά.
 β) Βρείτε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων C_1 και C_2 .

• ΑΣΚΗΣΗ 21η.

Μια ευθεία $\varepsilon : \psi = -2x$ τέμνει ένα κύκλο C στα σημεία $A(3,1)$ και B .

Αν το σημείο $\Gamma(-1, 0)$ ανήκει στον κύκλο C και $\overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} = 0$, τότε:

- α) Να βρείτε τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$.
 β) Δείξτε ότι το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K\left(\frac{9}{4}, -\frac{9}{2}\right)$.
 γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C .

• ΑΣΚΗΣΗ 22η.

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 4x - 2\psi - 4 = 0$ (1) και το σημείο $A(4, 2)$.

- α) Δείξτε ότι η εξίσωση (1) είναι εξίσωση κύκλου C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
 β) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου C που διέρχεται από το σημείο A και έχει μήκος $2\sqrt{5}$.