

Φ4

• ΑΣΚΗΣΗ 1η.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

- α) Δείξτε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
- β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

• ΑΣΚΗΣΗ 2η.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ 9x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

- α) Δείξτε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
- β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

• ΑΣΚΗΣΗ 3η.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 2$.

- α) Δείξτε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
- β) Να λυθούν οι εξισώσεις $f(x) = 12$ και $f^{-1}(x) = -2$.
- γ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τους άξονες και την ευθεία $\psi = x$.

• ΑΣΚΗΣΗ 4η.

Για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f .

• ΑΣΚΗΣΗ 5η.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x|x|$.

- α) Δείξτε ότι η f είναι 1 - 1.
- β) Να βρείτε την f^{-1} .

• ΑΣΚΗΣΗ 6η.

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β) Να αποδείξετε ότι $f^3(x) = f(x^3)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x$.
- δ) Να αποδείξετε ότι $f^3(-1) + f^3(1) = f(0)$.
- ε) Αν $f(8) = 64$, να υπολογίσετε το $f(2)$.

• ΑΣΚΗΣΗ 7η.

Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) - f(\psi) = f\left(\frac{x}{\psi}\right)$ για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}^*$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε:

- α) Δείξτε ότι ορίζεται η f^{-1} .
- β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$.
- γ) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, δείξτε ότι $f \nearrow (0, +\infty)$

•ΑΣΚΗΣΗ 8η.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : (3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x + 3$ και $g(x) = x + 2$.

- α) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- β) Να βρεθεί η συνάρτηση $g \circ f$.
- γ) Εφόσον ορίζεται να βρεθεί η $(g \circ f)^{-1}$.
- δ) Να λυθεί η εξίσωση $(f \circ f^{-1})(3) = (g \circ f)(x) - 2 - e^5$.