Φ (16/11/2020)

Συνέχεια συνάρτησης – Βασικά θεωρήματα

· ΑΣΚΗΣΗ 1η.

Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+\alpha f^2(x)+\beta f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\alpha^2<4\beta$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

· ΑΣΚΗΣΗ 2η.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν : $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2016)+f(2017)=0$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

· ΑΣΚΗΣΗ 3η.

Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f^2(x)=2e^x f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

· ΑΣΚΗΣΗ 4η.

α) Να λυθεί η εξίσωση $\ell n(x^2+e)-1=0$.

β) Δείξτε ότι $\ell n(x^2+e)-1\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση $f^2(x)=\left[\ell n(x^2+e)-1\right]^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

· ΑΣΚΗΣΗ 5η.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε να ισχύει η ισότητα $f(\xi)=\eta\mu^2\alpha\cdot f(\alpha)+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot f(\beta)$.

· ΑΣΚΗΣΗ 6η.

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(2)=-2019$. Αν 0 και 5 είναι δυο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(f(4)-2020\right)x^2+3x-2018\right]$.

· ΑΣΚΗΣΗ 7η.

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1,4]$ με $f(1)f(2)f(4)=8$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,4]$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,4]$.

β) Η εξίσωση $f(x)=2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1,4]$.

γ) Η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1,4]$.

· ΑΣΚΗΣΗ 8η.

Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύουν $f(4)=2$ και $f(x)\cdot f(f(x))=12$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2)=6$.

β) Αν η f είναι γνησίως μονότονη να βρείτε το είδος της μονοτονίας της.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=3$.

δ) Να υπολογίσετε το $f(3)$.

· ΑΣΚΗΣΗ 9η.

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Αν ισχύουν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $f(1)=-2$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

· ΑΣΚΗΣΗ 10η.

Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Αν το σημείο $A(1,1)$ ανήκει στην γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f τότε:

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{x}+2,\ x\in(0,1)$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x}=1+2f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

· ΑΣΚΗΣΗ 11η.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+5+\ell n(x+3)$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την συνέχεια και τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $(x+3)e^{2x}=1$.

δ) Αν x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (γ), να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-5}\cdot \eta\mu\big(3f(x)-15\big)\right].$$

· ΑΣΚΗΣΗ 12η.

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $3|f(x)|+2f^2(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Αν γνωρίζετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right) = -1$, δείξτε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

· ΑΣΚΗΣΗ 13η.

Μια συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, με $\Delta = [0, 2]$ είναι συνεχής. Αν $f(\Delta) = [-1, 0]$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{1}{2}x_0 - 1$.

· ΑΣΚΗΣΗ 14η.

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(\eta\mu 2x)}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha^2 + \alpha - 4, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

· ΑΣΚΗΣΗ 15η.

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = e$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\ell n|f(x)| \cdot \ell n\left(e^{2x}|f(x)|\right) = 1$, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

· ΑΣΚΗΣΗ 16η.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + \eta\mu x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \eta\mu x$.

γ) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.