Φ8

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

· ΑΣΚΗΣΗ 1η.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x, & x\le 1 \\ \beta x^2+1, & x>1 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

· ΑΣΚΗΣΗ 2η.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+2, & x\le 1 \\ \beta\sqrt{x}, & x>1 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

· ΑΣΚΗΣΗ 3η.

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει $\eta\mu x-x^2\le f(x)\le \eta\mu x+x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) $f(0)=0$. β) $f'(0)=1$.

· ΑΣΚΗΣΗ 4η.

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ισχύουν $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)-2xf(x)}{x^2}=-1$. Δείξτε ότι $f'(0)=1$.

· ΑΣΚΗΣΗ 5η.

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Να δείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}=3f'(x_0)$.

β) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0+2h)}{h}=-3f'(x_0)$.

γ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0+3h)}{f(x_0+h)-f(x_0-h)}=-1$. Δίνεται ότι $f'(x_0)\neq 0$.

· ΑΣΚΗΣΗ 6η.

Έστω συνάρτηση f με $f(1)=1$ και $f'(1)=1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f^2(x), & x\le 1 \\ \alpha x^3+\beta, & x>1 \end{cases}$.

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η g να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

· ΑΣΚΗΣΗ 7η.

Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=2$.

Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)\left(f(1)-f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right)\right]=2$.

· ΑΣΚΗΣΗ 8η.

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\le x_0 \\ f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0), & x>x_0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

· ΑΣΚΗΣΗ 9η.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha\in\mathbb{R}$ με $\alpha>0$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(\alpha)}}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$. Δίνεται ότι $f(\alpha)>0$.

β) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f^2(x)-f^2(\alpha)}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$.

· ΑΣΚΗΣΗ 10η.

Αν $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\nu\ge 2$ και η συνάρτηση $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|\cdot P(x)$ παραγωγίζεται στα σημεία 1 και 3, τότε:

α) Να δείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζες το 1 και το 3.

β) Να βρείτε τις παραγώγους $f'(1)$ και $f'(3)$

γ) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{P(x)}{x-1}$ και $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{P(x)}{x-3}$.

· ΑΣΚΗΣΗ 11η.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x, & x<\pi \\ \alpha x+\beta, & x\ge\pi \end{cases}$ να παραγωγίζεται στο $x_0=\pi$.

· ΑΣΚΗΣΗ 12η.

Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 3 και ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(5-2x)}{x-1}=-4$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-3}$ με $x\ne 3$.

α) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=2$.

β) Δείξτε ότι $f(3)=0$.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3,f(3))$.

· ΑΣΚΗΣΗ 13η.

Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(f\left(\dfrac{3}{x}\right)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\right]=2$. Δίνεται ακόμη ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο $B(0,-1)$.

α) Δείξτε ότι $f'(0)=1$.

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(2x)-f^2(x)}{x}$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $(0, f(0))$.