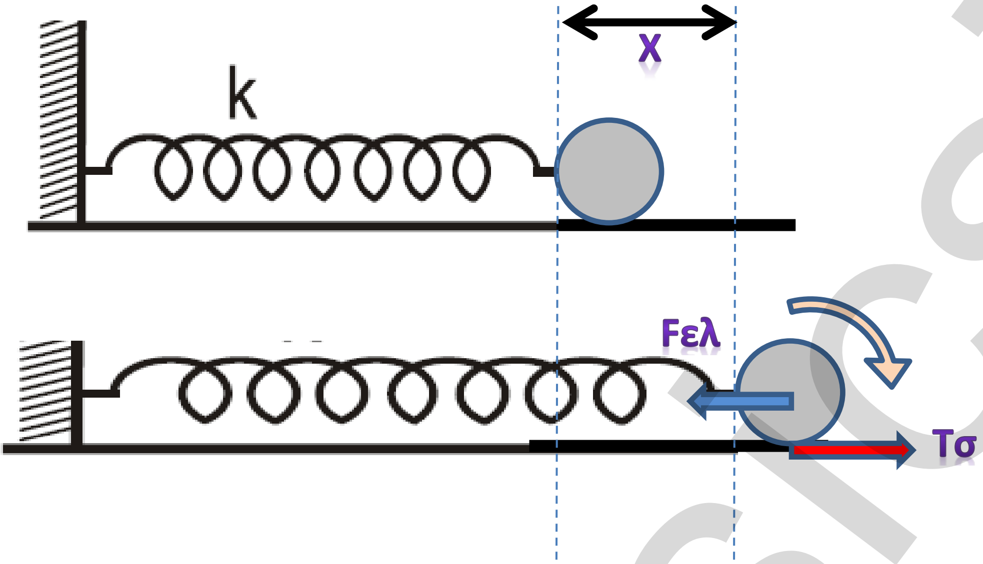
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΜΕ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ –ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΔΕΜΕΝΟ ΣΤΗΝ ΑΚΡΗ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ

Έστω στερεό μάζας M ,ακτίνας R με ροπή αδράνειας Icm ,ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.Το στερέο είναι δεμένο στην άκρη ελατηρίου σταθερας K
A) Να δείξετε ότι εάν το εκτρέψουμε κατά L ,από τη θεση ισορροπίας του, θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση (θεωρούμε ότι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει)
B) Να υπολογίσετε την μέγιστη ταχύτητα του στερεού.



A) Θα πρέπει να δειξούμε ότι σε τυχαία θέση x ισχύει

ΣFx=-Dx (1)

Είναι $\Sigma F_x = Ma_{cm} => T_\sigma - F_{\varepsilon\lambda} = Ma_{cm} => T_\sigma - kx = Ma_{cm}$ **(2)**

$\Sigma\tau = I_{cm}a_\gamma => -T_\sigma R = I_{cm}a_\gamma$ **(3)**

$a_{cm} = a_\gamma R$ **(4)**

$\alpha\pi o\ (3),(4) \varepsilon\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ T_\sigma = -\frac{I_{cm}}{R}a_\gamma => T_\sigma = -\frac{I_{cm}a_{cm}}{R^2}\ (4)'$ **και από (2)**

$T_\sigma - F_{\varepsilon\lambda} = Ma_{cm} => -\frac{I_{cm}a_{cm}}{R^2} - Kx = Ma_{cm} => -Kx = Ma_{cm} + \frac{I_{cm}a_{cm}}{R^2} =>$

$-Kx = \left(M + \frac{I_{cm}}{R^2}\right)a_{cm} => \frac{-Kx}{\left(M+\frac{I_{cm}}{R^2}\right)} = a_{cm} => a_{cm} = -\frac{Kx}{\left(M+\frac{I_{cm}}{R^2}\right)}$ **(i)**

Από (4)', (i) $T_\sigma = \frac{I_{cm}}{R^2}\frac{Kx}{\left(M+\frac{I_{cm}}{R^2}\right)} \Rightarrow T_\sigma = \frac{I_{cm}Kx}{R^2\left(M+\frac{I_{cm}}{R^2}\right)} \Rightarrow T_\sigma = \frac{I_{cm}Kx}{R^2M+I_{cm}}$

Ετσι $\Sigma Fx = T_\sigma - F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \Sigma Fx = \frac{I_{cm}Kx}{R^2M+I_{cm}} - kx \Rightarrow \Sigma Fx = \left(\frac{I_{cm}}{R^2M+I_{cm}} - 1\right)kx \Rightarrow$

$\Sigma Fx = \left(\frac{-R^2M}{R^2M+I_{cm}}\right)kx \Rightarrow \Sigma Fx = -\left(\frac{MR^2}{MR^2+I_{cm}}\right)kx$

και από σύγκριση με την (1) έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma Fx = -\left(\frac{MR^2}{MR^2+I_{cm}}\right)kx \\ \Sigma Fx = -Dx\end{array}\right\}$$

κανει ΑΑΤ με D= $\frac{MR^2K}{MR^2+I_{cm}}$ **και**

περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\frac{MR^2K}{MR^2+I_{cm}}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}\left(\frac{MR^2+I_{cm}}{MR^2}\right)}$ **(ii)**

Εάν τωρα υποθέσουμε ότι $I_{cm} = \lambda MR^2$ **τότε η (ii) γίνεται**

$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}\left(\frac{MR^2+\lambda MR^2}{MR^2}\right)} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}(1+\lambda)}$

Β) Για να υπολογίσουμε την μέγιστη ταχύτητα θα εφαρμόσουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας .

Στην αρχική θέση x=L είναι $E_{M(X=L)} = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\pi\varepsilon\rho} + U_{\varepsilon\lambda(X=L)} \Rightarrow$

$E_{M(X=L)} = 0+0+\frac{1}{2}KL^2 \Rightarrow E_{M(X=L)} = \frac{1}{2}KL^2$ **(1)**

Στην θεση x=0 εχουμε $E_{M(X=0)} = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\pi\varepsilon\rho} + U_{\varepsilon\lambda(X=0)} \Rightarrow$

$E_{M(X=0)} = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \Rightarrow E_{M(X=0)} = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\frac{\upsilon_{cm}^2}{R^2} \Rightarrow$

$E_{M(X=0)} = \frac{1}{2}\left(M+\frac{I_{cm}}{R^2}\right)\upsilon_{cm}^2$ **(2)**

Από Διατήρηση μηχανικής ενέργειας θα εχουμε (1)=(2)

$\frac{1}{2}KL^2 = \frac{1}{2}\left(M+\frac{I_{cm}}{R^2}\right)\upsilon_{cm}^2 \Rightarrow KL^2 = \left(M+\frac{I_{cm}}{R^2}\right)\upsilon_{cm}^2 \Rightarrow \upsilon_{cm}^2 = \frac{KL^2}{\left(M+\frac{I_{cm}}{R^2}\right)} \Rightarrow$

$\upsilon_{cm}(max) = \sqrt{\frac{KL^2}{\left(M+\frac{I_{cm}}{R^2}\right)}}$ **(i)**

Εάν τωρα υποθέσουμε ότι $\mathbf{I_{cm} = \lambda MR^2}$ τότε η (i) γίνεται

$$\boldsymbol{\upsilon_{cm}(max) = \sqrt{\frac{KL^2}{\left(M+\frac{\lambda MR^2}{R^2}\right)}} \Rightarrow \upsilon_{cm}(max) = L\sqrt{\frac{K}{M(1+\lambda)}}}$$

<u>Παρατήρηση</u>

Πως θα μπορούσαμε να αντιμετωπίσουμε το β ερώτημα με Α.Δ.Ε.Τ. ;
Αφού αποδείξαμε ότι κάνει το σώμα ΑΑΤ με

D= $\frac{MR^2K}{MR^2+I_{cm}}$ και αν $\mathbf{I_{cm} = \lambda MR^2} \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{K}{1+\lambda}$

τότε η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι E_T=K+U_T => $U_{T(MAX)}$ =K+U_T =>

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}DL^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow \frac{K}{1+\lambda}L^2 = M\upsilon_{cm}{}^2 + 0 \Rightarrow \frac{K}{1+\lambda}L^2 = M\upsilon_{cm}{}^2 \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\upsilon_{cm}{}^2 = \frac{K}{M(1+\lambda)}L^2 \Rightarrow \upsilon_{cm}(max) = L\sqrt{\frac{K}{M(1+\lambda)}}}$$