

3 ^ο ΛΥΚΕΙΟ Ν. ΣΜΥΡΝΗΣ	ΕΠΩΝΥΜΟ
ΤΑΞΗ Γ' (Θετική Κατεύθυνση) ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6	ΟΝΟΜΑ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ 22 Ιαν. 2000	ΒΑΘΜΟΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

Για την συνάρτηση f ισχύει $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

B. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

ΖΗΤΗΜΑ 2

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x - x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα

$(0, \pi)$.

B. Να αποδείξετε ότι για κάθε λ η εξίσωση $\eta\mu x - x + 1 = \lambda$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

Καλή Επιτυχία

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

A. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 175, A8, i)

B. Για $x > 0$ έχουμε $\frac{1}{x} - x \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x} + x$. Οι συναρτήσεις $\frac{1}{x} - x$, $\frac{1}{x} + x$ για $x \rightarrow 0^+$

έχουν όριο $+\infty$ και επομένως από το κριτήριο παρεμβολής και το όριο της $\frac{f(x)}{x}$ για $x \rightarrow 0^+$ είναι $+\infty$.

Για $x < 0$ έχουμε $\frac{1}{x} - x \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{1}{x} + x$ και όπως πριν βρίσκουμε ότι για $x \rightarrow 0^-$ το

όριο της $\frac{f(x)}{x}$ είναι $-\infty$. Επομένως αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά το

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ δεν υπάρχει.

ΖΗΤΗΜΑ 2

A. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 198, A6

B. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - x + 1 - \lambda$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f(x) = x \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 1 + \frac{1}{x} - \frac{\lambda}{x} \right)$.

Έχουμε: $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{1}{|x|} |\eta\mu x| \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|}$ οπότε $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$ δηλαδή $-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ από

την οποία προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Επομένως υπάρχουν

$x_1 \neq x_2$ ώστε $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ και από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει x

μεταξύ των x_1, x_2 ώστε $f(x) = 0$. Το x αυτό είναι και λύση της δοθείσας εξίσωσης.

