
ΤΑΞΗ Γ
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
Διαγώνισμα στις Παραγώγους
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2001-2002
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2$.

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμψής.
2. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{e^{x-1} - 1}$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για μία συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ισχύει

$$2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1$$

1. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
2. (α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
(β) Να αποδείξετε ότι για κάθε x ισχύει

$$|f(x) - x| = \frac{1}{2(f^2(x) + xf(x) + x^2) + 6}$$

- (γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f για $x \rightarrow +\infty$.
-

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο A1 i) σελ. 277
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{e^{x-1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^5 - 5x^4 + 2}{e^{x-1} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{15x^4 - 20x^3}{e^{x-1}} = -5$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο B4 σελ. 269
2. (α) Από την παραγωγή της δοθείσας σχέσης έχουμε ότι $6f^2(x)f'(x) + 6 = 6x^2 + 6$ από την οποία προκύπτει ότι $f'(x)(f^2(x) + 1) = x^2 + 1$. Αλλά για κάθε x είναι $x^2 + 1 > 0$ και $f^2(x) + 1 > 0$ επομένως θα είναι και $f'(x) > 0$. Άρα $f \uparrow$.

(β) Από την υπόθεση διαδοχικά έχουμε

$$2f^3(x) - 2x^3 + 6f(x) - 6x = 1 \Rightarrow$$

$$2(f^3(x) - x^3) + 6(f(x) - x) = 1 \Rightarrow$$

$$2(f(x) - x)(f^2(x) + f(x)x + x^2) + 6(f(x) - x) = 1 \Rightarrow$$

$$(f(x) - x)(2(f^2(x) + f(x)x + x^2) + 1) = 1 \Rightarrow$$

$$f(x) - x = \frac{1}{2(f^2(x) + f(x)x + x^2) + 1} \Rightarrow$$

$$|f(x) - x| = \frac{1}{|2(f^2(x) + f(x)x + x^2) + 1|}$$

Αλλά είναι γνωστό ότι για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α, β ισχύει $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$. Επομένως είναι $2(f^2(x) + f(x)x + x^2) + 1 \geq 0$. Άρα

$$|f(x) - x| = \frac{1}{2(f^2(x) + f(x)x + x^2) + 1}$$

(γ) Από την υπόθεση θέτοντας όπου $x = 0$ έχουμε ότι $2f^3(0) + 6f(0) = 1$ δηλαδή ότι $2f(0)(f^2(0) + 3) = 1$. Άρα $f(0) > 0$. Αλλά είναι $f \uparrow$ επομένως για κάθε $x > 0$ θα είναι $f(x) > 0$. Επομένως για $x > 0$ θα ισχύει:

$$|f(x) - x| = \frac{1}{2(f^2(x) + f(x)x + x^2) + 1} < \frac{1}{2x^2 + 1}$$

δηλαδή:

$$-\frac{1}{2x^2 + 1} < f(x) - x < \frac{1}{2x^2 + 1}$$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2 + 1}\right) = 0$ και από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ που σημαίνει ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f για $x \rightarrow +\infty$.