

---

ΤΑΞΗ Γ  
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ  
Διαγώνισμα στα Όρια και τη Συνέχεια Συναρτήσεων  
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2009-2010  
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

---

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

1. Να βρείτε για ποιές τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$
2. (α') Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη.  
(β') Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \neq \pm 1$  ισχύει  $f^{-1}(x) = \frac{-1}{f(x)}$   
(γ') Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f^{-1}(x))$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες και συνεχείς στο  $[0, 1]$  που πληρούν τις σχέσεις

$$f(0) < g(0) \text{ και } f(1) > g(1)$$

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστος  $\xi$  τέτοιος ώστε

$$\xi \in (0, 1) \text{ και } f(\xi) = g(\xi) \tag{1}$$

2. Υποθέτουμε ότι για ένα αριθμό  $\xi$  που ικανοποιεί τις σχέσεις (1) του προηγούμενου ερωτήματος και για τα  $f(0), g(1)$  ισχύει επιπλέον:

$$f(\xi) < f(0) < g(1) \tag{2}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, \xi) \\ g(x) & x \in [\xi, 1] \end{cases}$$

- (α') Να αποδείξετε ότι η  $h$  είναι συνεχής.
- (β') Να εξετάσετε αν η  $h$  είναι 1-1.

---

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

ΖΗΤΗΜΑ 1,1: Σχολικό βιβλίο Α2 ii) σελ. 145  
ΖΗΤΗΜΑ 2,1: Σχολικό βιβλίο Β4 σελ. 199