

---

ΤΑΞΗ Γ  
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ  
Διαγώνισμα στους Μιγαδικούς Αριθμούς  
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2012-2013  
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

---

ΘΕΜΑ 1

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  και τον μιγαδικό

$$z = \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}$$

1. Να εξετάσετε πότε ο  $z$  είναι πραγματικός
2. Έστω

$$w = \frac{(\alpha - \gamma) + (\delta - \beta) i}{(\delta + \beta) + (\alpha + \gamma) i}$$

Να αποδείξετε ότι αν ο  $w$  είναι πραγματικός τότε  $|z| = 1$ .

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω

$$w = \frac{2z - i}{iz + 2}$$

Υποθέτουμε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού  $z$  ανήκει στον κύκλο  $\mathcal{C}$  κέντρου  $O(0, 0)$  και ακτίνας  $\rho = 1$ .

1. Να αποδείξετε ότι και η εικόνα του  $w$  ανήκει στον  $\mathcal{C}$ .
2. (α') Να αποδείξετε ότι

$$0 \leq |z - w| \leq 1$$

(β') Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της απόστασης των εικόνων των  $z, w$ .

---

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

ΖΗΤΗΜΑ 1,1: Σχολικό βιβλίο Β1, σελ. 96  
ΖΗΤΗΜΑ 2,1: Σχολικό βιβλίο Β5 β) σελ. 102