

---

ΤΑΞΗ Γ  
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ  
Διαγώνισμα στους Μιγαδικούς Αριθμούς  
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2014-2015  
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

---

ΘΕΜΑ 1

1. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς  $z_1$  και  $z_2$  να αποδείξετε ότι

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

2. Έστω  $\mathcal{C}$  ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Υποθέτουμε ότι η εικόνα του  $w$  ανήκει στον  $\mathcal{C}$  και ότι για τον μιγαδικό αριθμό  $u$  ισχύει

$$|u + w|^2 + |u - w|^2 = 4.$$

Να αποδείξετε ότι και η εικόνα του  $u$  ανήκει στον  $\mathcal{C}$ .

ΘΕΜΑ 2

1. Έστω ο μιγαδικός αριθμός  $z$  με  $z \neq 0$ . Να δείξετε ότι ο  $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$  είναι πραγματικός αριθμός και ότι  $-2 \leq \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \leq 2$ .
2. Έστω  $\alpha \in [-2, 2]$ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $z \neq 0$  για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = \alpha$$

---

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

ΖΗΤΗΜΑ 1,1: Σχολικό βιβλίο Α9, σελ. 101

ΖΗΤΗΜΑ 2,1: Σχολικό βιβλίο Β6 σελ. 96