
ΤΑΞΗ Γ
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΤΘΥΝΣΗ
1ο Τρίωρο Διαγώνισμα
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2001-2002
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω z ένας μιγαδικός του οποίου η εικόνα ανήκει στην ευθεία και

$$x + y = 1$$

1. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού iz ανήκει στην ευθεία

$$x - y = -1$$

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να εξετάσετε αν μπορεί να ισχύει:

$$(\alpha') \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

$$(\beta') \operatorname{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$g(x) = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

1. Να αποδείξετε ότι

$$g'(x) - f'(x) = f''(x)(x - x_0)$$

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι το $M(x_0, f(x_0))$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ των f, g .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι οι $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο M .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $0 < \beta < \alpha$ και οι συναρτήσεις

$$\varphi(x) = \sqrt{(x + \alpha)(x + \beta)} - x$$

και

$$\psi(x) = \sqrt{(x + \alpha)(x - \beta)} - x$$

1. Να ορίσετε την συνάρτηση $\psi - \varphi$.

13 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε τους αριθμούς α, β αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 7$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 5$$

12 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Να αποδείξετε ότι αν για μία συνεχή συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχουν x_1, x_2 ώστε

$$h(x_1) = e^{-x_1} \quad \text{και} \quad h(x_2) = 2e^{-x_2}$$

τότε:

(α') $x_1 \neq x_2$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Υπάρχει x_3 μεταξύ των x_1, x_2 έτσι ώστε

$$h(x_3) = \frac{3e^{-x_3}}{2}$$

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(e^x h(x)) = 0$$

για όλα τα x .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ