

---

ΤΑΞΗ Γ  
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΤΘΥΝΣΗ  
2ο Τρίωρο Διαγώνισμα  
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2001-2002  
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

---

**ΖΗΤΗΜΑ 1**

Έστω

$$f(x) = x^2 - \ln x$$

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $f$ .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^2 = \ln x$  δεν έχει λύση.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

**ΖΗΤΗΜΑ 2**

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε για κάθε  $x \in (0, \beta - \alpha)$  να ισχύει:

$$g(\alpha + x) = g(\beta - x)$$

1. Να αποδείξετε ότι  $g(\alpha) = g(\beta)$ .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε η γραφική παράσταση της  $g$  έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη που είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(x) dx = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} g(x) dx$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

**ΖΗΤΗΜΑ 3**

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1}$$

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την  $f$ .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 4$  ισχύει

$$2f(x-1) \leq \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt \leq 2f(x+1)$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

#### ΖΗΤΗΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2 - e^x$$

και η ευθεία

$$(\varepsilon) \quad y = -\frac{1}{\lambda}x \quad \text{με } \lambda > 0$$

1. Να αποδείξετε ότι η  $(\varepsilon)$  τέμνει την  $\mathcal{C}_f$  σε δύο ακριβώς σημεία

$$M_1(x_1, f(x_1)), \quad M_2(x_2, f(x_2))$$

με  $x_1 < x_2$ .

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Για τα  $x_1, x_2$  του προηγούμενου ερωτήματος:

(α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε

$$\frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} = e^\xi = \frac{1}{\lambda}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $(\varepsilon)$  και την  $\mathcal{C}_f$  είναι ίσο με

$$E = \frac{(x_2 - x_1)(4\lambda - 2 + x_2 + x_1)}{2\lambda}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.  
Καλή Επιτυχία