

---

ΤΑΞΗ Γ  
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΤΘΥΝΣΗ  
2ο Τρίωρο Διαγώνισμα  
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2002-2003  
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

---

**ΖΗΤΗΜΑ 1**

Έστω

$$f(x) = \ln x - x$$

Να βρείτε:

1. Τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Τα ακρότατα της  $f$ .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Τις ασύμπτωτες της  $f$ .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Το σύνολο τιμών της  $f$ .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

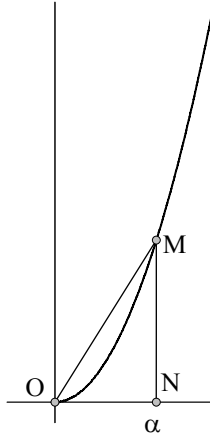
**ΖΗΤΗΜΑ 2**

Έστω η συνάρτηση  $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^2$ .

1. Να βρείτε σημείο της  $C_f$  που απέχει από το σημείο  $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  ελάχιστη απόσταση.

13 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω  $E_1$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$ , την ευθεία  $x = \alpha$  ( $\alpha > 0$ ) και τον άξονα  $x'$ . Έστω  $E_2$  το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία  $O$ ,  $M(\alpha, f(\alpha))$  και  $N(\alpha, 0)$ .



Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$E_2 = \frac{3}{2}E_1$$

12 ΜΟΝΑΔΕΣ

### ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε για όλα τα  $x, y$  να ισχύει:

$$f(xy) = (x) + f(y)$$

Έστω  $\alpha, \beta$  με  $0 < \alpha < \beta$ . Να αποδείξετε ότι:

1. Για κάθε  $x$  ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{x} f'(1)$$

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = (\beta - \alpha) f'(\xi)$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Για κάθε  $x$  ισχύει

$$\left( \int_{\alpha}^{\beta} f(tx) dt \right)' = \frac{1}{x} (\beta - \alpha) f'(1)$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

#### ΖΗΤΗΜΑ 4

Ένας πληθυσμός  $\Pi(t)$  κατά την χρονική στιγμή  $t = 0$  είναι  $10^6$  και μεταβάλλεται με ρυθμό μεταβολής

$$(2 \cdot 10^6) \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}$$

1. Ο πληθυσμός  $\Pi(t)$  με την πάροδο του χρόνου αυξάνει. Γιατί;

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε το  $\Pi(t)$ .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε από από ποιά χρονική στιγμή και μετά ο πληθυσμός θα υπερβεί το 1.500.000.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Ποια θα είναι, κατά προσέγγιση, η τιμή του πληθυσμού μετά πάροδο μεγάλου χρονικού διαστήματος;

5 ΜΟΝΑΔΕΣ