

---

ΤΑΞΗ Γ  
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ  
2ο Τρίωρο Διαγώνισμα  
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2004-2005  
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

---

**ΖΗΤΗΜΑ 1**

Έστω η συνάρτηση  $\varphi(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 1$

1. Να μελετήσετε την  $\varphi$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της  $\varphi$ .

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε το σύνολο τιμών  $\varphi([0, 5])$  της  $\varphi$  στο διάστημα  $[0, 5]$ .

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

**ΖΗΤΗΜΑ 2**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2 - 2$ .

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  στρέφει τα κυρτά προς τα κάτω σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{x^4} \right)$ .

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int f(x) dx$ .

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

### ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Έστω  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής και τέτοια ώστε  $g(x) \geq 0$  για όλα τα  $x \in [\alpha, \beta]$ . Να αποδείξετε ότι αν ισχύει  $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = 0$  τότε θα ισχύει  $g(x) = 0$  για όλα τα  $x \in [\alpha, \beta]$ .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $\int_0^1 (f^2(x) - 1)^2 dx = 0$
- Υπάρχει  $x_0 \in [0, 1]$  ώστε  $f(x_0) > 0$ .

(α') Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Να υπολογίσετε το  $\int_0^1 f(x) dx$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

### ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με  $f''(x) > 0$  για όλα τα  $x \in [\alpha, \beta]$ .

1. Έστω  $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$  με  $x_1 < x_2$  και  $y = \lambda x + \kappa$  η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία  $M_1(x_1, f(x_1))$  και  $M_2(x_2, f(x_2))$ . Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in [x_1, x_2]$  ισχύει  $f(x) \leq \lambda x + \kappa$ .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω  $(\varepsilon_1)$  η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μία εφαπτομένη  $(\varepsilon_2)$  της  $\mathcal{C}_f$  η οποία είναι παράλληλη στην  $(\varepsilon_1)$ .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Με  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  να είναι οι ευθείες του προηγούμενου ερωτήματος ονομάζουμε:

- $E_1$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες  $(\varepsilon_1)$ ,  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  και την  $\mathcal{C}_f$ .

- $E_2$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες ( $\varepsilon_2$ ),  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  και την  $C_f$ .

Να αποδείξετε ότι  $E_1 \geq E_2$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ