
ΤΑΞΗ Γ
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΤΘΥΝΣΗ
1ο Τρίωρο Διαγώνισμα
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2007-2008
Καθηγητές: Σπυρίδων Αμούργης, Βασίλειος Τσίτσος, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = -2 - i, \quad z_2 = 4 + 2i$$

1. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = |z_1 \bar{z}_2 + z_2|$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$(z_1 + z_2)^{2008} + (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)^{2008}$$

είναι πραγματικός.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει:

$$|z - z_1| = 2|z - z_2|$$

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 1 - \ln x \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

1. Ορίσετε την συνάρτηση $f + g$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε την συνάρτηση g^{-1} .

5 Μονάδες

4. Να ορίσετε την συνάρτηση $g^{-1} \circ f$.

5 Μονάδες

5. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της $g^{-1} \circ f$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ZΗΤΗΜΑ 3

Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ |x-2|\sqrt{x} & x > 1 \end{cases}$$

1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια την f .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε την παράγωγο της f .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ZΗΤΗΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi : (0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\varphi(x) = e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

1. Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της φ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι η φ έχει μοναδική ρίζα.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = e^x \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο A της C_f και σημείο B της C_g ώστε οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα A, B να είναι παράλληλες.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ