Πειραματικο Λυκειο
της
Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ετος Ιδρυσης 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Τάξη Γ′, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
16 Απριλίου 2008

Διδάσκοντες: Σπυρίδων Αμούργης, Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Βασίλειος Τσίτσος

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις - Παρατηρήσεις[1]

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -4x^5 + 5x^4$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

   7 Μοναδες

2. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A(t) = f(t) + 2, \quad t \in [-1, 1]$$

   6 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ ώστε

$$1 = 5\xi^4 - 5\xi^3$$

   6 Μοναδες

4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x + x}$.

   6 Μοναδες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Είναι $f'(x) = -20x^4 + 20x^3 = -20x^3(x-1)$. Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολής της f:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	τ.ε. $f(0)=0$	$\nearrow$	τ.μ. $f(1)=1$	$\searrow$	$-\infty$

2. Προφανώς η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A(t)$ προκύπτουν αν στην μέγιστη και την εκάχιστη τιμή της $f(t)$, $t \in [-1, 1]$ προθέσουμε το 2. Από τον πίνακα μεταβολής της f συμπεραίνουμε ότι $f([-1, 0]) = [f(0), f(-1)] = [0, 9]$ και $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [0, 1]$. Επομένως $f([-1, 1]) = [0, 9]$ και η μέγιστη τιμή της f στο $[-1, 1]$ είναι 9 ενώ η ελάχιστη είναι 0. Επομένως η μέγιστη τιμή της $A(t)$ είναι 11 και η ελάχιστη είναι 2.

3. Η f είναι παραγωγίσιμη και επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $\xi \in [-1, 1]$ δηλαδή θα υπάρχει κάποιο $\xi \in (-1, 1)$ ώστε να ισχύει:

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'(\xi)$$

   δηλαδή $-4 = -20\xi^4 + 20\xi^3$ που ισοδυναμεί με την:

$$1 = 5\xi^4 - 5\xi^3$$

4. Έχουμε:
   $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x + x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{(f(x))'}{(\eta\mu x + x)'} =$
   $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{-20x^4 + 20x^3}{\sigma\upsilon\nu x + 1} = 0$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x + 1} \quad \text{και}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

με α, β διάφορους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς.

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, F.

   5 Μοναδες

2. Να βρείτε τις παραγώγους των f, F.

   5 Μοναδες

3. Να εξετάσετε αν η F έχει σημεία καμπής.

   5 Μοναδες

4. Να αποδείξετε ότι

$$F(1) = \alpha + (\beta - \alpha)\ln 2$$

   5 Μοναδες

[1] Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

5. Να βρείτε τα α, β ώστε η F να παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ακρότατο το $1 - 2\ln 2$.

5 Μοναδες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Είναι $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ δηλαδή $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Το πεδίο ορισμού της F θα απαρτίζεται από εκείνα τα x για τα οποία και τα δύο άκρα του ολοκληρώματος ανήκουν σε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$ που απαρτίζουν το $\mathcal{D}_f$. Επειδή το ένα άκρο 0 ανήκει ήδη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ πρέπει και το άλλο άκρο x να ανήκει σε αυτό το διάστημα. Άρα $\mathcal{D}_F = (-1, +\infty)$.

2. Είναι $f'(x) = \frac{\alpha-\beta}{(x+1)^2}$ και $F'(x) = f(x)$.

3. Αν η F είχε καμπή σε κάποιο σημείο με τετμημένη x_0 τότε αναγκαστικά θα ήταν $F''(x_0) = 0$. Αλλά η F'' είναι η f' που δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Άρα η F δεν έχει σημεία καμπής.

4. Εδώ χρειάζεται να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\alpha t+\beta}{t+1}dt$. Με αλλαγή μεταβλητής $t+1 = u$ βρίσκουμε $t = u-1$ και $\frac{\alpha t+\beta}{t+1} = \frac{\alpha(u-1)+\beta}{u} = \alpha + (\beta-\alpha)\frac{1}{u}$, $dt = du$ και τα νέα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι τα 1, 2. Επομενως $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_1^2 \left(\alpha + (\beta-\alpha)\frac{1}{u}\right)du = [\alpha u - (\beta-\alpha)\ln|u|]_1^2 = \alpha + (\beta-\alpha)\ln 2$.

5. Αν η F παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της F θα πρέπει, από το θεώρημα του Fermat, να ισχύει $F'(1) = 0$. Πρέπει δηλαδή $f(1) = \frac{\alpha+\beta}{2} = 0$ που σημαίνει ότι θα πρέπει να είναι $\beta = -\alpha$. Ακόμη πρέπει να ισχύει $F(1) = 1 - 2\ln 2$. Αλλά όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι $F(1) = \alpha + (\beta-\alpha)\ln 2$. Έχουμε λοιπόν το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \beta = -\alpha \\ \alpha + (\beta-\alpha)\ln 2 = 1 - 2\ln 2 \end{array}\right\}$$

Λύνοντας βρίσκουμε $\alpha = 1, \quad \beta = -1$. Πρέπει τώρα να ελέγξουμε αν πράγματι οι δύο αυτές τιμές μας οδηγούν σε συνάρτηση F που στο 1 έχει ακρότατο. Αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι όντως η παράγωγος f της F εκατέρωθεν του 1 αλλάζει πρόσημο. Για τις συγκεκριμένες τιμές έχουμε $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ και βλέπουμε ότι η f στο διάστημα $(-1, 1)$ είναι αρνητική ενώ στο διάστημα $(1, +\infty)$ είναι θετική. Άρα πράγματι η F για αυτές τις τιμές παρουσιάζει ακρότατο στο 1.

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{1+e^x}$$

1. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

7 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας $\rho \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(\rho) = 0 \quad \text{και} \quad f(-\rho) = 4$$

7 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): \quad y = x + 3 \qquad\qquad (\varepsilon_2): \quad y = x + 1$$

είναι, αντιστοίχως, ασύμπτωτες της $\mathcal{C}_f$ για $x \to -\infty$ και $x \to +\infty$.

6 Μοναδες

4. Ονομάζουμε:

- E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ και τις ευθείες (ε_1), $x = -1$, $x = 0$.
- E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ και τις ευθείες (ε_2), $x = 0$, $x = 1$.

Να αποδείξετε ότι $E_1 = E_2$.

5 Μοναδες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Είναι $f'(x) = \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα. Εύκολα βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Άρα $f(\mathbb{R}) = f((-\infty, +\infty)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

2. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό και να επαληθεύσουμε ότι:

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (x+3)) = 0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$$

Αλλά: $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+3)) =$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x + 1 + \frac{2}{1+e^x} - (x+3)\right) =$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-2 + \frac{2}{1+e^x}\right) = 0$ διότι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (x+1)) =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + 1 + \frac{2}{1+e^x} - (x+1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{1+e^x} = 0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

3. Όπως είδαμε η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Άρα ο 0 είναι τιμή της f και επομένως υπάρχει ρ, μοναδικός λόγω της μονοτονίας, ώστε $f(\rho) = 0$. Πρέπει να επαληθεύσουμε ότι αυτός ο ρ ικανοποιεί την $f(-\rho) = 4$. Δηλαδή ξέρουμε ότι

$$\rho + 1 + \frac{2}{1+e^\rho} = 0 \quad (*)$$

και θέλουμε να επαληθεύσουμε ότι

$$-\rho+1+\frac{2}{1+e^{-\rho}}=4 \quad (**)$$

Κάνοντας λίγες πράξεις βρίσκουμε ότι η $(**)$ ισοδυναμεί με την $\rho e^{\rho}+\rho+e^{\rho}+3=0$ με την οποία ισοδυναμεί, όπως εύκολα διαπιστώνεται, και η $(*)$. Επομένως ο ένας και μοναδικός ρ για τον οποίο ισχύει $f(\rho)=0$ επαληθεύει και την $f(-\rho)=4$.

4. Πρέπει πρώτα να βρούμε την σχετική θέση της $\mathcal{C}_f$ με τις ευθείες (ε_1), (ε_2). Για το σκοπό αυτό εξετάζουμε το πρόσημο των διαφορών:

$$f(x)-(x+3)$$

και

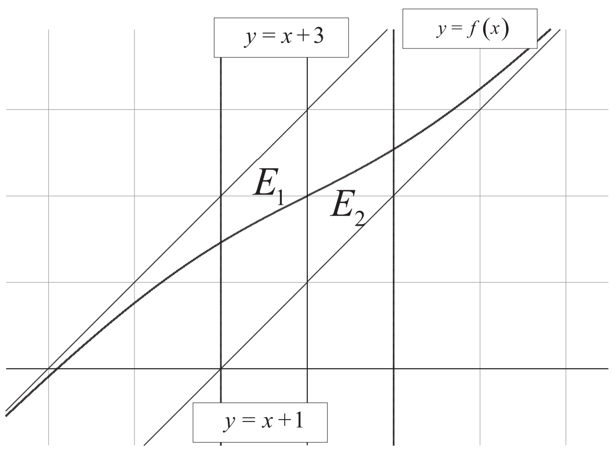
$$f(x)-(x+1)$$

Είναι $f(x)-(x+3)=-2\frac{e^x}{1+e^x}<0$ επομένως η $\mathcal{C}_f$ βρίσκεται κάτω από την (ε_1). Ακόμη $f(x)-(x+1)=\frac{2}{1+e^x}>0$ από την οποία συνάγουμε ότι η $\mathcal{C}_f$ είναι πάνω από την (ε_2). Επομένως:

$$E_1=\int_{-1}^{0}((x+3)-f(x))\,dx$$

και

$$E_2=\int_{0}^{1}(f(x)-(x+1))\,dx$$



Πρέπει να επαληθεύσουμε ότι

$$\int_{-1}^{0}((x+3)-f(x))\,dx=\int_{0}^{1}(f(x)-(x+1))\,dx$$

ή ισοδύναμα ότι:

$$\int_{-1}^{0}\left(2-\frac{2}{1+e^x}\right)dx=\int_{0}^{1}\left(\frac{2}{1+e^x}\right)dx \quad (***)$$

Η επαλήθευση της $(***)$ μπορεί να γίνει:

(α΄) *Μετασχηματίζοντας το ολοκλήρωμα του α΄ μέλους έως ότου να καταλήξουμε στο β΄ μέλος*
Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x+1=u$ οπότε $x=u-1$ και $dx=du$ βρίσκουμε ότι

$$\int_{-1}^{0}\left(2-\frac{2}{1+e^x}\right)dx=\int_{0}^{1}\left(2-\frac{2}{1+e^{u-1}}\right)du$$

και κάνοντας στο ολοκλήρωμα του β΄ μέλους την αλλαγή $u=1-t$ οπότε $du=-dt$ βρίσκουμε $\int_0^1\left(2-\frac{2}{1+e^{u-1}}\right)du=-\int_1^0\left(2-\frac{2}{1+e^{-t}}\right)dt=\int_0^1\left(2-\frac{2e^t}{1+e^t}\right)dt=\int_0^1\frac{2}{1+e^t}dt=\int_0^1\left(\frac{2}{1+e^x}\right)dx$

(β΄) *Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα και των δύο μελών*
Είναι:
$\int_{-1}^{0}\left(2-\frac{2}{1+e^x}\right)dx=\int_{-1}^{0}2dx-2\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx$
και επίσης $\int_0^1\left(\frac{2}{1+e^x}\right)dx=2\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx$.
Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int\frac{1}{1+e^x}dx$ θέτοντας $u=e^x$ οπότε $x=\ln u$, $dx=\frac{1}{u}du$ και $\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{1}{(1+u)u}du$. Αναζητούμε A,B ώστε $\frac{1}{(1+u)u}=\frac{A}{1+u}+\frac{B}{u}$ και κατά τα γνωστά βρίσκουμε $A=-1,\quad B=1$ οπότε $\int\frac{1}{(1+u)u}du=\int\left(-\frac{1}{1+u}+\frac{1}{u}\right)u=\ln|u|-\ln|1+u|+c$. Άρα
$\int_{-1}^{0}2dx-2\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx=$
$2[x]_{-1}^{0}-2\left[\ln\frac{e^x}{1+e^x}\right]_{-1}^{0}=2-2\ln(1+e)+2\ln 2$
και
$2\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx=2\left[\ln\frac{e^x}{1+e^x}\right]_0^1=2-2\ln(1+e)+2\ln 2$

Παρατηρηση 1 Μια πιό σύντομη αντιμετώπιση μπορούμε να έχουμε αν εργασθούμε αφαιρώντας από τη συνάρτηση και τι ευθείες το 2 δηλαδή αν πάρουμε τις ευθείες $y=x+1$, $y=x-1$ και την $\varphi(x)=f(x)-2$ η οποία όπως εύκολα διαπιστώνεται είναι περιττή και επομένως ένας μετασχηματισμός στα ολοκληρώματα ο $u=-x$ επαρκεί.
Παρατηρηση 2(Προστέθηκε μετά την διόρθωση) Οι λύσεις αυτές δόθηκαν στους μαθητές αμέσως μετά την εξέταση. Αξίζει να σημειωθεί ότι αρκετά παιδιά έλυσαν το συγκεκριμένο ερώτημα δίνοντας πιό απλή λύση από τις προτεινόμενες: Μόνο με ένα μετασχηματισμό τον $u=-x$

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει:

- $g(x)>0$
- $g(x)+\ln g(x)=x$

1. Να αποδείξετε ότι η g δεν έχει ακρότατα.

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

5 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι η g είναι κυρτή.

5 Μοναδες

4. Να βρείτε το σημείο τομής της $\mathcal{C}$ με την ευθεία $y=x$.

5 Μοναδες

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x) \geq \frac{x+1}{2}$$

5 Μοναδες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Αν η g είχε ακρότατο σε κάποιο σημείο τότε επειδή ορίζεται σε ανοικτό διάστημα θα έπρεπε σε αυτό το σημείο (θεώρημα του Fermat να μηδενίζεται η παράγωγος της. Όμως για κάθε x είναι:

$$g'(x) + (\ln g(x))' = (x)'$$

και επομένως

$$g'(x)\left(1 + \frac{1}{g(x)}\right) = 1$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η g' δεν μηδενίζεται. Άρα η g δεν έχει ακρότατα.

2. Από το προηγούμενο ερώτημα βρίσκουμε ότι $g'(x) = \frac{g(x)}{1+g(x)} > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.
Παρατηρηση Θα μπορούσαμε να απαντήσουμε το ερώτημα 1. μετά το 2. Αφού η g είναι γνησίως αύξουσα σε ένα ανοικτό διάστημα για κάθε ανοικτό διάστημα I που περιέχει το x_0 υπάρχουν στο I αριθμοί x_1, x_2 στο I έτσι ώστε $x_1 < x_0 < x_2$ και λόγω μονοτονίας είναι $g(x_1) < g(x_0) < g(x_2)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν τιμές της g στο I που είναι μεγαλύτερες αλλά και μικρότερες του $g(x_0)$. Επομένως η g δεν μπορεί να έχει ακρότατο στο οποιοδήποτε x_0.

3. Από την σχέση

$$g'(x) = \frac{g(x)}{1+g(x)} \quad (\#)$$

συνάγουμε ότι η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Παραγωγίζοντας την (#) βρίσκουμε:
$g''(x) = \left(\frac{g(x)}{1+g(x)}\right)' = \frac{g'(x)(1+g(x))-g(x)g'(x)}{(1+g(x))^2} = \frac{g'(x)}{(1+g(x))^2} > 0$
Επομένως η g είναι κυρτή.

4. Πρέπει να λύσουμε το σύστημα των $y = x$, $y = g(x)$ Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = g(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = x \\ g(x) = x \end{array}\right\} \Leftrightarrow (\text{υπόθεση})$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ \ln g(x) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = x \\ g(x) = 1 \end{array}\right\}$$

Αλλά στην σχέση $g(x) + \ln g(x) = x$ αν είναι $g(x) = 1$ θα είναι προφανώς και $x = 1$. Αλλά και αντιστρόφως αν είναι $x = 1$ θα έχουμε $\ln g(x) = 1 - g(x)$ που από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ισχύει μόνο αν είναι $g(x) = 1$. Αυτό διότι σύμφωνα με την εφαρμογή είναι $\ln g(x) \leq g(x) - 1$. Άρα $1 - g(x) \leq g(x) - 1$. Δηλαδή $g(x) \geq 1$. Αν ήταν $g(x) > 1$ στη σχέση $\ln g(x) = 1 - g(x)$ το α′ μέλος θα ήταν θετικό και το β′ μέλος αρνητικό (άτοπο). Άρα $g(x) = 1$. Επομένως $x = g(x) = 1$ και το κοινό σημείο θα είναι το $A(1, 1)$.
Παρατηρηση Τό ότι η εξίσωση $\ln A = 1 - A$ έχει μοναδική λύση την $A = 1$ μπορεί να αποδειχθεί αυτοτελώς με μελέτη κατά τα γνωστά.

5. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $g(x) - \frac{x+1}{2} \geq 0$. Ονομάζουμε $h(x) = g(x) - \frac{x+1}{2}$ και έχουμε $h'(x) = g'(x) - \frac{1}{2} = \frac{g(x)}{1+g(x)} - \frac{1}{2} = \frac{g(x)-1}{1+g(x)}$. Άλλα είδαμε ότι $g(1) - 1$ και λόγω μονοτονίας της g θα είναι $g(x) < 1$ για $x < 1$ και $g(x) > 1$ για $x > 1$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο το $h(1) = g(1) - 1 = 0$. Επομένως $h(x) \geq 0$ για όλα τα x και το $=$ ισχύει μόνο για $x = 1$.
Παρατηρηση Μία άλλη αντιμετώπιση είναι η ακόλουθη: Αφού η g είναι κυρτή η γραφική της παράσταση είναι πάνω από από κάθε εφαπτομένης της. Δηλαδή αν $y = px + q$ είναι οποιοαδήποτε εφαπτομένη της $\mathcal{C}_g$ τότε θα είναι $f(x) \geq px + q$. Η $\mathcal{C}_g$ διέρχεται από το $A(1, 1)$ και η εφαπτομένη της σε αυτό είναι: $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$ που όπως εύκολα διαπιστώνεται είναι η $y = \frac{x+1}{2}$.