

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -4x^5 + 5x^4$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A(t) = f(t) + 2, \quad t \in [-1, 1]$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ ώστε

$$1 = 5\xi^4 - 5\xi^3$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x + x}$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x + 1} \quad \text{και}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

με α, β διάφορους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς.

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, F .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε τις παραγώγους των f, F .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να εξετάσετε αν η F έχει σημεία καμπής.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να αποδείξετε ότι

$$F(1) = \alpha + (\beta - \alpha) \ln 2$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να βρείτε τα α, β ώστε η F να παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ακρότατο το $1 - 2 \ln 2$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{1 + e^x}$$

1. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το \mathbb{R} .

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας $\rho \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(\rho) = 0 \quad \text{και} \quad f(-\rho) = 4$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$(\varepsilon_1) : y = x + 3 \quad (\varepsilon_2) : y = x + 1$$

είναι, αντιστοίχως, ασύμπτωτες της \mathcal{C}_f για $x \rightarrow -\infty$ και $x \rightarrow +\infty$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Ονομάζουμε:

- E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την \mathcal{C}_f και τις ευθείες (ε_1) , $x = -1$, $x = 0$.

- E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες (ε_2) , $x = 0$, $x = 1$.

Να αποδείξετε ότι $E_1 = E_2$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

- $g(x) > 0$
- $g(x) + \ln g(x) = x$

1. Να αποδείξετε ότι η g δεν έχει ακρότατα.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι η g είναι κυρτή.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το σημείο τομής της C_g με την ευθεία $y = x$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x) \geq \frac{x+1}{2}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ