Πειραματικο Λυκειο
της
Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ετος Ιδρυσης 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Τάξη Γ′, Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
27 Ιανουαρίου 2010

Διδάσκοντες:
Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Κωνσταντίνος Λαμπρόπουλος, Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αρετή Χούλη

Εκφωνήσεις - Απαντήσεις - Παρατηρήσεις [1]

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 ισχύει η ισοδυναμία
$$|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$$

2. Έστω $z=3-4i$. Να βρείτε:

   (α′) Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w για τους οποίους ισχύει
   $$|z|^2+|w|^2=|z-w|^2$$

   (β′) Τους μιγαδικούς w που έχουν μέτρο 10 και ισχύει $|z|^2+|w|^2=|z-w|^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)} \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2) \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=0 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}=0$ $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$

2. (α′) Από το προηγούμενο ερώτημα θα είναι $\operatorname{Re}(z\bar{w})=0$ οπότε αν ονομάσουμε $w=x+yi$ είναι $z\bar{w}=(3-4i)(x-yi)=3x-4y-(3y+4x)i$ και αφού το πραγματικό μέρος του $z\bar{w}$ είναι μηδέν θα ισχύει
   $$3x-4y=0 \quad (1)$$
   και ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w είναι η ευθεία με εξίσωση (1).

   (β′) Οι ζητούμενοι μιγαδικοί $w=x+yi$ ικανοποιούν την (1) αλλά και την
   $$x^2+y^2=100 \qquad (2)$$
   Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $x=\pm 8$, $y=\pm 6$ και επομένως οι μιγαδικοί είναι οι $w=\pm 8\pm 6i$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για μία συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

- $(f(x))^3+x^2f(x)=2x(f(x))^2+x^2\eta\mu 2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ και είναι πραγματικός αριθμός

1. Να αποδείξετε οτι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$
2. Υπάρχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ το οποίο έχει τεμημένη που ανήκει στο διάστημα $(1,2)$.
3. Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)+x\ln(\eta\mu x)-2x\ln x}{x}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Για $x\neq 0$ από την δοθείσα σχέση αν διαιρέσουμε με x^3 προκύπτει:
$\frac{(f(x))^3+x^2f(x)}{x^3}=\frac{2x(f(x))^2+x^2\eta\mu 2x}{x^3}$
οπότε έχουμε
$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\frac{f(x)}{x}=2\left(\frac{f(x)}{\chi}\right)^2+\frac{\eta\mu 2x}{\chi}$
Ας ονομάσουμε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=t$. Τότε παίρνοντας όρια και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}2=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}2=2$ βρίσκουμε $t^3+t=2t^2+2$ από τη οποία έχουμε $t^3+t-2t^2-2=0$ και $(t-2)(t^2+1)=0$ οπότε τελικά $t=2$.

2. Η δοθείσα σχέση γράφεται $(f(x))^3-2x(f(x))^2+x^2f(x)=x^2\eta\mu 2x$ ή αλλιώς $f(x)(x-f(x))^2=x^2\eta\mu 2x$. Θέτοντας $x=1$ και $x=2$ βρίσκουμε
$f(1)(1-f(1))^2=\eta\mu 2$
$f(2)(2-f(2))^2=4\eta\mu 4$ Είναι $\frac{\pi}{2}<2<\pi$ και επομένως $\eta\mu 2>0$ και $\pi<4<\frac{3\pi}{2}$ οπότε $\eta\mu 4<0$. Τα $f(1)$, $f(2)$ είναι ομόσημα με τα $\eta\mu 2$, $\eta\mu 4$ άρα ετερόσημα. Από το θεώρημα του Bolzano συμπεραίνουμε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

[1] Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης (Ευχαριστώ τον συνάδελφο Νικόλαο Ζήση για την βοήθεια).

3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)+x\ln(\eta\mu x)-2x\ln x}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} + \ln(\eta\mu x) - 2\ln x\right) =$
$= \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} + \ln\left(\frac{\eta\mu x}{x^2}\right)\right) =$
$= \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} + \ln\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)\right) = +\infty$

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} & x\in[-1,\,0)\cup(0,\,1] \\ \frac{1}{2} & x=0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
2. Να βρείτε τα x_0 στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη.
3. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $A\left(\frac{4}{5}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.
4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{3}\right)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1^2-\sqrt{1-x^2}^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{1}{2} = f(0)$
Επομένως η f είναι συνεχής.

2. Στα διαστήματα $(-1,0)$, $(0,1)$ η f είναι παραγωγίσιμη από τους κανόνες παραγώγισης ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Τα σημεία -1,0,1 πρέπει να τα εξετάσουμε χωριστά.

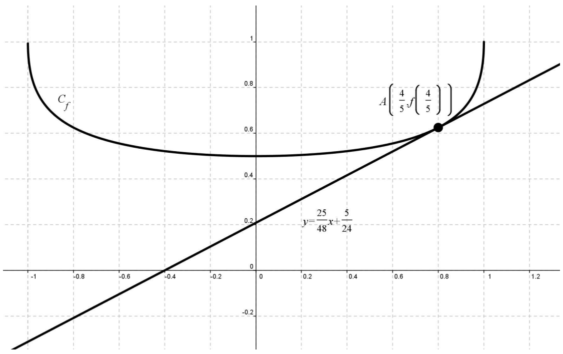
$\boxed{x_0=-1}$ Έχουμε:

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}-1}{x+1} =$
$= \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1-\sqrt{1-x^2}-x^2}{x^2(x+1)} =$
$= \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1-\sqrt{1-x^2}-x^2}{x^2(x+1)} =$
$= \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{\left(1-x^2\right)-\sqrt{1-x^2}}{x^2(x+1)} =$
$= \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{\left(1-x^2\right)^2-\sqrt{1-x^2}^2}{x^2(x+1)\left((1-x^2)+\sqrt{1-x^2}\right)} =$
$= \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^2(x-1)(x+1)}{x^2(x+1)\left((1-x^2)+\sqrt{1-x^2}\right)} =$
$= \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x-1}{(1-x^2)+\sqrt{1-x^2}} = -\infty$
Άρα δεν παραγωγίζεται στο -1.

$\boxed{x_0=1}$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}-1}{x-1} =$
$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1-\sqrt{1-x^2}-x^2}{x^2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1-\sqrt{1-x^2}-x^2}{x^2(x-1)} =$
$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\left(1-x^2\right)-\sqrt{1-x^2}}{x^2(x-1)} =$
$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\left(1-x^2\right)^2-\sqrt{1-x^2}^2}{x^2(x-1)\left((1-x^2)+\sqrt{1-x^2}\right)} =$
$= \lim\limits_{x\to x\to 1^-} \frac{x^2(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)\left((1-x^2)+\sqrt{1-x^2}\right)} =$
$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+1}{(1-x^2)+\sqrt{1-x^2}} = +\infty$
άρα δεν παραγωγίζεται στο 1.

$\boxed{x_0=0}$ Είναι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}-\frac{1}{2}}{x} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-x^2-2\sqrt{1-x^2}}{2x^3} =_{(x^2=u)} \lim\limits_{u\to 0} \frac{2-u-2\sqrt{1-u}}{2\sqrt{u}^3} =$
$\lim\limits_{u\to 0} \frac{u^2}{2\sqrt{u}^3\left(2-u+2\sqrt{1-u}\right)} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{\sqrt{u}}{2\left(2-u+2\sqrt{1-u}\right)} =$
0
επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με παράγωγο 0.

3. Εφαρμόζουμε τους κανόνες παραγώγισης και βρίσκουμε
$f'(x) = \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\right)' = \frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)'x^2-\left(x^2\right)'\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^4} =$
$... = \frac{2-x^2-2\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}x^3}$ οπότε $f'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{25}{48}$. Επομένως αφού $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{5}{8}$ η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι
$y - f\left(\frac{4}{5}\right) = f'\left(\frac{4}{5}\right)\left(x-\frac{4}{5}\right)$
δηλαδή $y - \frac{5}{8} = \frac{25}{48}\left(x-\frac{4}{5}\right)$
που μπορεί να πάρει και τη μορφή:
$y = \frac{25}{48}x + \frac{5}{24}$



4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f\left(x+\frac{1}{3}\right)$. Αφού $x\in[-1,1]$ για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει
   - $-1 \le x \le 1$
   - $-1 \le x + \frac{1}{3} \le 1$

οι ανισώσεις αυτές συναληθεύουν για $-1 \le x \le \frac{2}{3}$ επομένως η συνάρτηση g ορίζεται στο διάστημα $[-1, \frac{2}{3}]$. Η g είναι συνεχής και $g(-1)\,g\left(\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{5}\right)\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{5}\right) = \frac{-35+15\sqrt{5}}{8} = \frac{5\left(-7+3\sqrt{5}\right)}{8} < 0$. Επομένως από το θεώρημα του Bolzano η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1, \frac{2}{3}]$ άρα και στο $\mathbb{R}$.

ΖΗΤΗΜΑ 4

Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f(x) + e^{f(x)} = 5 - 4x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $f(1) = 0$

1. Να αποδείξετε ότι:
   (α′) Η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
   (β′) Για κάθε $x \ne 1$ ισχύει $f(x) \ne 0$

(γ′) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $(1, +\infty)$

(δ′) Η εξίσωση $(f \circ f)(x) - f\left(5 - 10x^3\right) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α′) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu f(x)\right]$

(β′) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{[1 - f(2)] \cdot x^4 + 5x^3 + 2}{x^3 + x - 2}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. (α′) Για να αποδείξουμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι 1-1. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε θα είναι και $e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)}$. Άρα $f(x_1) + e^{f(x_1)} = f(x_2) + e^{f(x_2)}$. Αλλά είναι $f(x_1) + e^{f(x_1)} = 5 - 4x_1$ και $f(x_2) + e^{f(x_2)} = 5 - 4x_2$ επομένως $5 - 4x_1 = 5 - 4x_2$ από την οποία προκύπτει ότι $-4x_1 = -4x_2$ και τελικά $x_1 = x_2$.

(β′) Αφού η f είναι 1-1 τότε για $x \neq 1$ θα είναι $f(x) \neq f(1)$ δηλαδή $f(x) \neq 0$ αφού δίνεται πως $f(1) = 0$.

(γ′) Έστω ότι $x \in (1, +\infty)$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $f(x) < 0$. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει και ότι είναι $f(x) \geq 0$. Τότε θα είναι $f(x) + e^{f(x)} \geq 0 + e^0$ δηλαδή $f(x) + e^{f(x)} \geq 1$. Αυτό σημαίνει ότι $5 - 4x \geq 1$ και επομένως $x \leq 1$ πράγμα αδύνατο αφού έχουμε υποθέσει ότι $x > 1$. Άρα τελικά ισχύει $f(x) < 0$.

(δ′) Η εξίσωση $(f \circ f)(x) - f\left(5 - 10x^3\right) = 0$ γράφεται $(f \circ f)(x) = f\left(5 - 10x^3\right)$ η οποία, επειδή η f είναι 1-1, ισοδυναμεί με την $f(f(x)) = f\left(5 - 10x^3\right)$. Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $f(f(x)) = f\left(5 - 10x^3\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα. Έχουμε $g(0) = f(0) - 5 + 0 = -5$ και $g(1) = f(1) - 5 + 10 = f(1) + 5$. Αρκει να εξασφαλίσουμε ότι $f(1) + 5 > 0$ δηλαδή ότι $f(1) > -5$. Πράγματι αν ήταν $f(1) \leq -5$ θα είχαμε $f(1) + e^{f(1)} \leq -5 + e^{-5} < -4$ πράγμα αδύνατο αφού είναι $f(1) + e^{f(1)} = 1$

Μία άλλη προσέγγιση για τα ερωτήματα (β),(γ): Ονομάζουμε $h(x) = x + e^x$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα επομένως 1-1 άρα αντιστρέψιμη. Η αντίστροφη της είναι επίσης γνησίως αύξουσα: Πράγματι αν υποτεθεί ότι y_1, y_2 είναι από το σύνολο τιμών της h με $y_1 < y_2$ τότε αποκλείονται οι περιπτώσεις $h^{-1}(y_1) = h^{-1}(y_2)$ και $h^{-1}(y_1) > h^{-1}(y_2)$ αφού δίνουν
$h\left(h^{-1}(y_1)\right) = h\left(h^{-1}(y_2)\right) \Rightarrow y_1 = y_2$ και
$h\left(h^{-1}(y_1)\right) > h\left(h^{-1}(y_2)\right) \Rightarrow y_1 > y_2$
άρα απομένει αναγκαστικά η $h^{-1}(y_1) < h^{-1}(y_2)$. Η δοθείσα σχέση $f(x) + e^{f(x)} = 5 - 4x$ γράφεται $h^{-1}(f(x)) = h^{-1}(5 - 4x)$ και εύκολα διαπιστώνεται, κατά τα γνωστά, ότι η σύνθεση $h^{-1}(5 - 4x)$ είναι γνησίως φθίνουσα αφού η h^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και η $5 - 4x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα και η f είναι γνησίως αύξουσα

- Όπως πριν αφού $f(0) = 0$ για $x \neq 0$ θα είναι $f(x) \neq 0$ (ερώτημα (β»
- Με $x > 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$ άρα η $f(x)$ είναι αρνητική για $x > 0$ (ερώτημα (γ»

2. (α′) Αφού η f είναι συνεχής το όριο της στο 0 θα είναι ίσο με την τιμή της στο 0 δηλαδή 0. Άρα $\lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu f(x)\right] =_{(f(x)=u)} \lim\limits_{u \to 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$

(β′) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{[1 - f(2)] \cdot x^4 + 5x^3 + 2}{x^3 + x - 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{[1 - f(2)] \cdot x^4}{x^3} =_{f(2)<0} -\infty$