



Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
16 Ιανουαρίου 2014

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέτης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Για τον μιγαδικό αριθμό w είναι γνωστό ότι:

$$\left| w + \sqrt{2}i \right| = 2 + \left| w - \sqrt{2}i \right|$$

1. Να αποδείξετε ότι $w \neq 0$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{2} \operatorname{Im} w = 1 + \left| w - \sqrt{2}i \right|$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε τον w αν είναι γνωστό ότι $\operatorname{Re} w = 2$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του w

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

1. Να βρείτε το πρόσημο της f .

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1}{f(x)}$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ ισχύει

$$2(\eta\mu x) f(x) - (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) f'(x) = 0$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Σε κάθε $x \in [0, 2\pi]$ αντιστοιχίζουμε την γωνία $\varphi(x)$ που σχηματίζει η εφαπτομένη της \mathcal{C}_f στο σημείο της $P(x, f(x))$ με τον $x'x$.
Με δεδομένο ότι η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της όταν $x = 0$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + 2x - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

1. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - f(y)| \geq 2|x - y|$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Υπάρχει η αντίστροφη της f .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Η f^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Η συνάρτηση $g(x) = f^{-1}(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω μία γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = f(1 - x)$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω $a \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = (x - a)^2 f(x)$$

είναι παραγωγίσιμη στο a

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Έστω τυχόν $x \in (0, 1)$.

(α') Να αποδείξετε ότι

- η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $P(x, f(x))$, $A(1, 0)$

και

- η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0)$, $B(1, 1)$

τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο M με τεταγμένη

$$r(x) = \frac{f(x)}{f(x) + 1 - x}$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $r(x)$ του προηγούμενου ερωτήματος είναι γνησίως αύξουσα.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

*Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.
Καλή Επιτυχία*