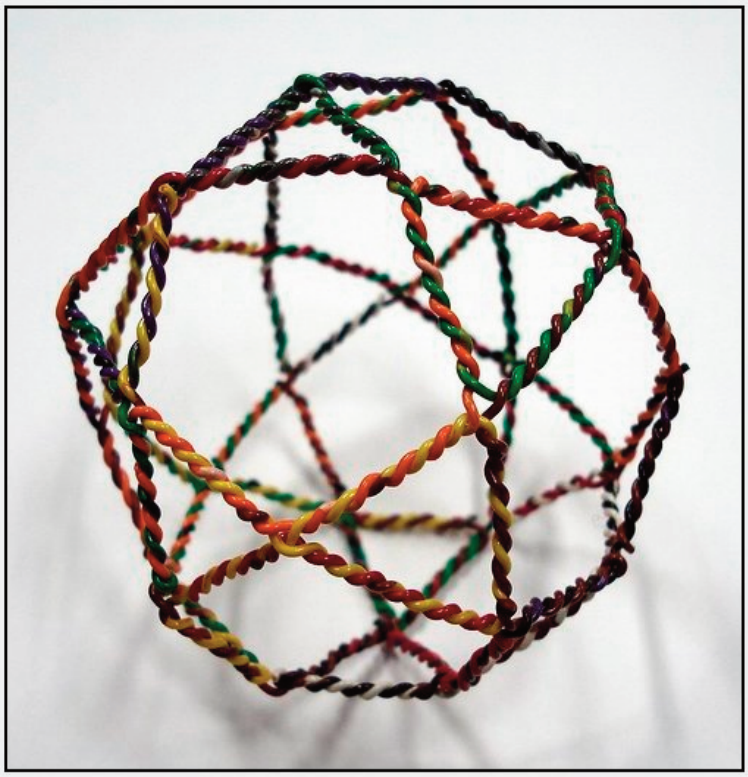
16 μήνες στο pathfinder/mathematica



Ν.Σ. Μαυρογιάννης

2010

Προλεγόμενα

Στην μαθηματική λέσχη http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/ γράφτηκα τον Αύγουστο του 2007 και διέκοψα την δραστηριότητα μου τον Δεκέμβριο του 2008 οπότε και μεταφερθήκαμε στον ιστότοπο www.mathematica.gr.

Για μένα οι 16 μήνες που πέρασα στο http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/ υπήρξαν μία απουδαία εμπειρία.

Μετείχα στην ζωή του και στις συζητήσεις του, και είχα ένα καθημερινό ερέθισμα για σκέψη και διάβασμα.

Γνώρισα εξαιρετικούς ανθρώπους με τους οποίους έχω την τιμή και την χαρά να συνεργάζομαι στο www.mathematica.gr.

Σαν ενθύμιο εκείνης της εποχής έχω συγκεντρώσε στις επόμενες σελίδες κάποια μνημόνια μερικών από τα θέματα στων οποίων την συζήτηση συμμετείχα με τον ένα ή τον άλλο τρόπο. Γράφτηκαν στις ημερομηνίες που αναφέρονται.

Αρκετά είχαν αναρτηθεί στο http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/ κάποια άλλα όχι.

Για όσες εκφωνήσεις ή λύσεις δεν αναφέρεται όνομα είναι ασκήσεις και λύσεις που έδωσα εγώ.

3 Ιανουαρίου 2010

Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Όπου άκρο και ακρότατο;
Όπου ακρότατο και μονοτονία;

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

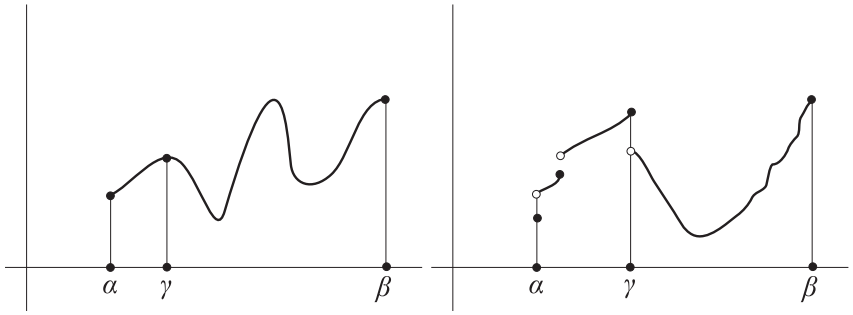
31 Αυγούστου 2007

Περίληψη

Στο δικτυακό τόπο συνάντησης Mathematica[1] έγινε μία ενδιαφέρουσα συζήτηση σχετικά με τη μονοτονία και τα ακρότατα[2]. Μερικές όψεις της συζήτησης περιγράφονται παρακάτω.

1 Όπου άκρο και ακρότατο;

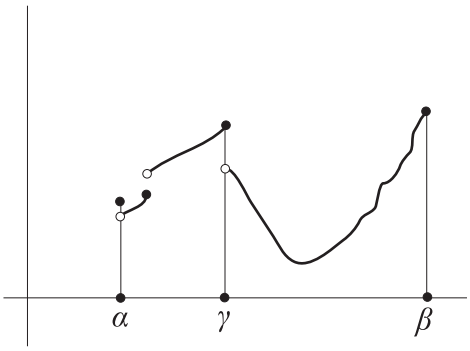
Έστω μία συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Όπως είναι γνωστό ο ορισμός (σελίδα 259) του βιβλίου Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου 'έπιτρέπει" στο α να είναι τοπικό ακρότατο της συνάρτησης. Στο βιβλίο Μαθηματικών Γενικής Παιδείας της Γ΄ Λυκείου (σελίδα 14), με έμμεσο τρόπο είναι αλήθεια, απαιτείται ως προϋπόθεση το σημείο να είναι *εσωτερικό* του διαστήματος. Από τους δύο ορισμούς κατά τη γνώμη μου είναι προτιμότερος ο δεύτερος αλλά αυτό είναι θέμα άλλης κουβέντας. Ας μείνουμε στον πρώτο ορισμό. Μπορεί το α να είναι ακρότατο της f; *Μία περίπτωση* που σίγουρα έχουμε ακρότατο στο α είναι εκείνη όπου η f σε ένα διάστημα της μορφής $[a, \gamma)$ που περιέχεται στο $[\alpha, \beta]$ είναι μονότονη. Και τούτο ανεξάρτητα από την συνέχεια της f.



Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο α

Από το δεύτερο σχήμα φαίνεται πόσο επισφαλής είναι η υπαρξη ακροτάτου. Αν "πειράξουμε" λίγο το $f(\alpha)$ (θυσιάζοντας βέβαια συνέχεια στο α και μονοτονία στο $[a, \gamma)$) θα πάψει η f να έχει τοπικό ακρότατο στο α:

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA
[2] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/17063?forum=2552&read=2796



Η f δεν έχει τοπικό ελάχιστο στο α

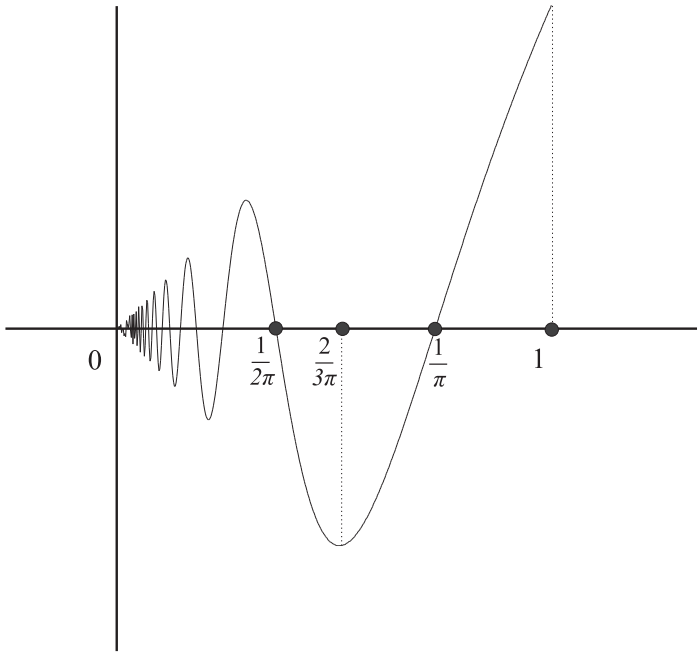
Τίθεται το ακόλουθο ερωτημα [3]

Ερωτημα 1 *Αν η f είναι συνεχής έχει πάντα η f ακρότατο στο α;*

Η απάντηση στο ερώτημα είναι απλή αρκεί να βρούμε μία συνάρτηση η οποία όσο κοντά θέλουμε στο α να παίρνει τιμές πάνω από το $f(\alpha)$ και τιμές κάτω από το $f(\alpha)$. Τέτοιες συναρτήσεις υπάρχουν πολλές. Μία πολύ γνωστή που περιλαμβάνεται σε πολλά εγχειρίδια απειροστικού λογισμού είναι η ακόλουθη:

$$f(x) = \begin{cases} x\eta\mu\frac{1}{x} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

και για τις ανάγκες μας αρκεί να την περιορίσουμε στο $[0,1]$.



Η f δεν έχει τοπικό ελάχιστο στο $\alpha = 0$

Πράγματι αυτή η συνάρτηση αλλάζει πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα

[3] Στο Mathematica ετέθη υπό μορφή προβλήματος, με ελαφρώς διαφορετική διατύπωση, από το μέλος Sok

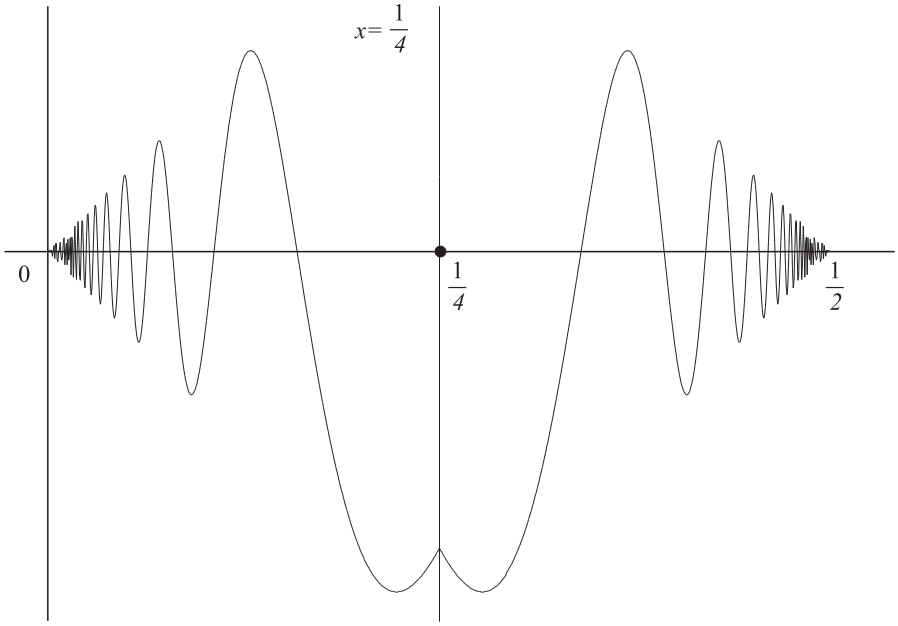
$$\left(1,\tfrac{1}{\pi}\right),\ \left(\tfrac{1}{2\pi},\tfrac{1}{\pi}\right),\ \left(\tfrac{1}{3\pi},\tfrac{1}{2\pi}\right),\ ...$$

και επομένως σε κάθε διάστημα της μορφής $(0,\gamma)$ θα πάρει και θετικές και αρνητικές τιμές άρα θα παίρνει και τιμές μεγαλύτερες του $f(\alpha)$ και μικρότερες. Η συνέχεια της f στα σημεία τα διάφορα του μηδενός είναι προφανής και η επαλήθευση της στο 0 είναι δουλειά ρουτίνας: Για $x\neq 0$ έχουμε $|f(x)|=\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq|x|$ άρα $-|x|\leq f(x)\leq|x|$ και επομένως $f(x)\to 0$ όταν $x\to 0$.

Ο Αλέξανδρος Συγκελάκης μέλος του Mathematica απέκλεισε και το ενδεχόμενο η συνάρτηση να έχει ακρότατο στο άλλο άκρο παίρνοντας ένα κομμάτι της συνάρτησης που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως στο $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ και το συμμετρικό του ως προς την ευθεία $x=\frac{1}{4}$. Αυτό γίνεται με την αλλαγή μεταβλητής $x\to\frac{1}{2}-x$ δηλαδή ορίζοντας τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{αν} \quad x=0\\ x\eta\mu\frac{1}{x} & \text{αν} \quad 0<x\leq\frac{1}{4}\\ \left(\frac{1}{2}-x\right)\eta\mu\frac{1}{\frac{1}{2}-x} & \text{αν} \quad 0\leq x<\frac{1}{4}\\ 0 & \text{αν} \quad x=\frac{1}{4}\end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση είναι:



Η f δεν έχει τοπικό ελάχιστο ούτε στο 0 ούτε στο $\frac{1}{2}$

2 Όπου ακρότατο και μονοτονία;

Έστω $x_0\in(\alpha,\beta)$ και μία συνεχής συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στα (α,x_0) και (x_0,β). Ξέρουμε (Μαθηματικά Κατεύθυνσης σελίδα 262) ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στα (α,x_0), (x_0,β) και η παράγωγος της είναι αρνητική στο πρώτο διάστημα και θετική στο δεύτερο τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0. Αν δε στο πρώτο διάστημα η παράγωγος είναι θετική και στο δεύτερο αρνητική τότε στο x_0 παρουσιάζεται μέγιστο. Τα συμπεράσματα εξακολουθούν να ισχύουν αν αντί θετική ή αρνητική παράγωγο να έχουμε απλώς μεγαλύτερη ή

ίση του 0 και μικρότερη ή ίση του 0. Επίσης είναι γνωστο και υπάρχει σε πολλά βιβλία Απειροστικού Λογισμού ακόμη και η συνθήκη της παραγωγισμότητας μπορεί να απαλειφθεί και στη θέση της να μπεί μια υπόθεση απλής μονοτονίας. Το συμπέρασμα εξακολουθεί να αληθεύει δηλαδή

- *αν η συνεχής* $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ *είναι φθίνουσα στο* (α,x_0) *και αύξουσα στο* (x_0,β) *τότε έχει ελάχιστο στο* x_0.

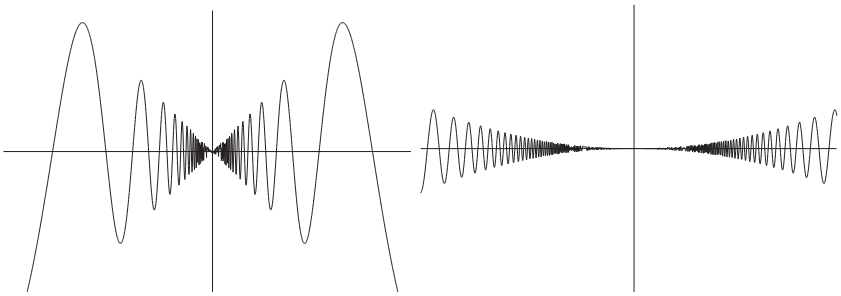
Εύλογο είναι το ερώτημα αν όλα τα ακρότατα (σε εσωτερικά σημεία βέβαια) μπορούν να προκύψουν από τη μονοτονία. Ο Μπάμπης Στεργίου μέλος και ένας από τους διαχειριστές του Mathematica έθεσε το πρόβλημα:

Ερωτημα 2 *Αν μια συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα* Δ *και στο εσωτερικό σημείο* α *παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε η* f *αλλάζει μονοτονία δεξιά και αριστερά του* α*, έστω πολύ κοντά στο* α*;*

Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα η απάντηση είναι αρνητική και μπορεί να μας τη δώσει η συνάρτηση που ήδη χρησιμοποιήσαμε με μία μικρή τροποποίηση: Αντι x χρησιμοποιούμε x^2. Δηλαδή θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x^2} & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases} \tag{2}$$

Υπάρχει κάποιος λόγος που χρησιμοποιούμε x^2. Το x^2 τείνει πίο γρήγορα στο 0 από το x και αυτό βοηθάει τη συνάρτηση να " ευθυγραμισθεί " κοντά στο 0 και να γίνει παραγωγίσιμη στο 0.

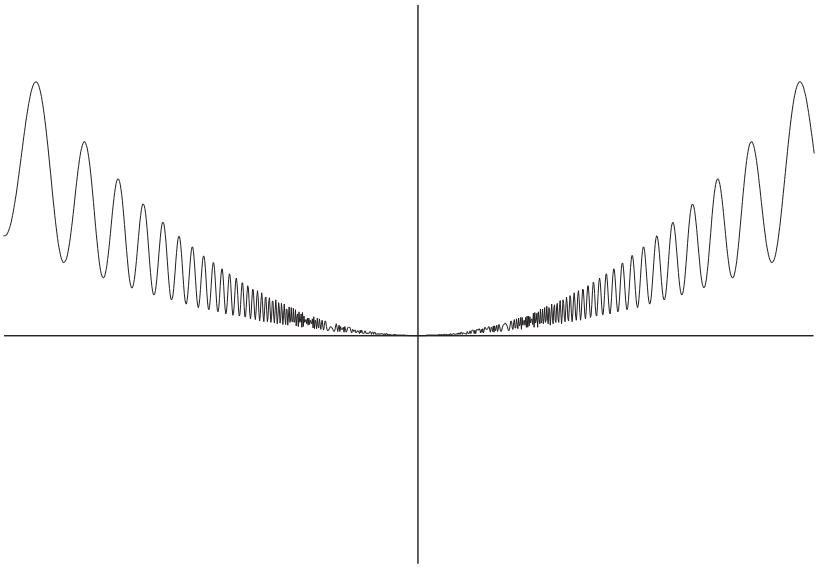


Οι συναρτήσεις f και φ των (1) και (2)

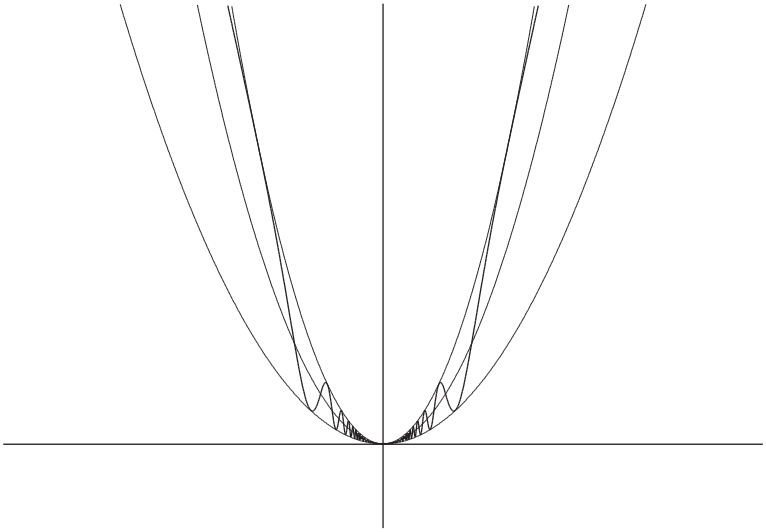
Η φ πρέπει να καμφθεί για να έχει ελάχιστο στο 0. Αυτό επιτυγχάνεται τοποθετώντας την στην $2x^2$ παίρνοντας την $h(x)=\varphi(x)+2x^2$ δηλαδή την:

$$h(x)=\begin{cases} 2x^2+x^2\eta\mu\frac{1}{x^2} & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases} \tag{3}$$

Στο επόμενο σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση της h κοντά σρο 0. Στο μεθεπόμενο παρατίθεται χάριν σύγκρισης η h μαζί με την x^2 και τις παραβολές όπου βρίσκονται τα σημεία όπου παρουσιάζει ακρότατα:



Οι συνάρτηση h της (3)



Οι συνάρτηση h της (3) μαζί με τις παραβολές $y = x^2,\ \ y = 2x^2,\ \ y = 3x^2$

Παρατηρούμε ότι για μη μηδενικά x ισχύει

$$h(x) = x^2\left(2 + \eta\mu\frac{1}{x^2}\right)$$

Επομένως είναι $h(x) \geq 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα η h έχει ελάχιστο στο μηδέν το μηδέν.

Η h είναι παραγωγίσιμη στα $x \neq 0$ και

$$h'(x) = 4x + 2x\eta\mu\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^2} \tag{4}$$

Ο λόγος μεταβολής της στα x και $x_0 = 0$ είναι

$$\frac{x^2\left(2 + \eta\mu\frac{1}{x^2}\right) - 0}{x - 0} = x\left(2 + \eta\mu\frac{1}{x^2}\right)$$

που εύκολα διαπιστώνεται ότι έχει όριο 0 για $x \to 0$. Άρα

$$h'(0) = 0$$

Η h είναι λοιπόν παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι

$$h'(x) = \begin{cases} 4x + 2x\eta\mu\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^2} & c \quad x \neq 0 \\ 0 & c \quad x = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Για να αποδείξουμε ότι η h δεν είναι φθίνουσα σε κάποιο διάστημα $(p, 0)$ και αύξουσα σε κάποιο $(0, q)$ είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι οσοδήποτε κοντά στο 0 η h' αλλάζει πρόσημο. Θα δείξουμε ότι η παράγωγος της h δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο 0. Ας ασχοληθούμε με θετικά x. Για $x > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$h'(x) = \frac{1}{x}\left(4x^2 - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x^2}\right) + 2x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

και βλέπουμε ότι το πρόσημο της h' είνα ίδιο με το πρόσημο της παράστασης

$$4x^2 - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x^2}\right) + 2x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad (*)$$

Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της όταν $x \to 0^+$. Ο προσθετέος $4x^2$ έχει όριο 0 επομένως ενδιαφέρει ο

$$-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x^2}\right) + 2x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Η κατάσταση απλουστεύται αν θέσουμε $x^2 = t$ οπότε πάλι $t \to 0^+$. Ας ονομάσουμε

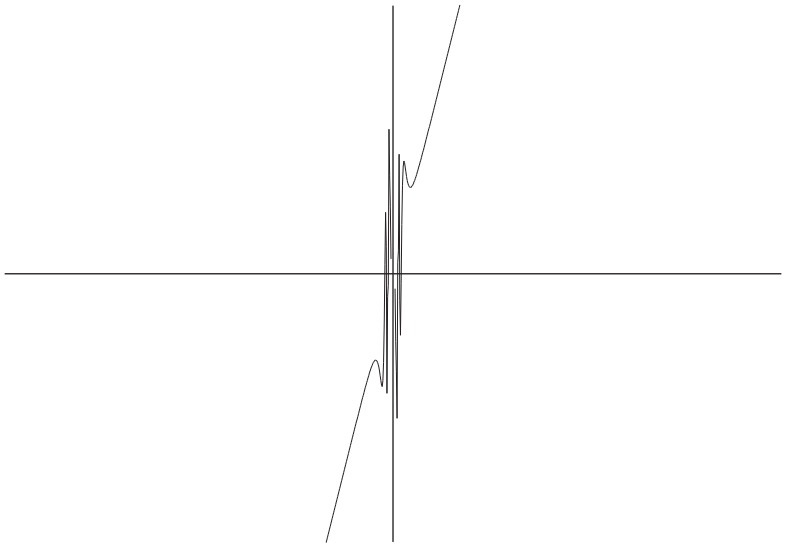
$$g(t) = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{t}\right) + 2t\eta\mu\left(\frac{1}{t}\right)$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$t_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad t'_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$$

που είναι και οι δύο μηδενικές. Εύκολα βρίσκουμε ότι $g(t_n) = -2$ και $g(t'_n) = 2$. Επομένως και $\lim_{n\to+\infty} g(t_n) = -2$, $\lim_{n\to+\infty} g(t'_n) = 2$ Αυτό σημαίνει ότι αν στην $(*)$ αντικαταστήσουμε τις ακολουθίες $\sqrt{t_n}, \sqrt{t'_n}$ θα πάρουμε δύο ακολουθίες που η μία θα έχει όριο το -2 και η άλλη το 2. Συνεπώς η h' αλλάζει πρόσημο οσοδήποτε κοντά στο 0 [4].

[4] Μάλιστα αν υπολογίσουμε τα όρια $\lim_{n\to+\infty} h'\left(\sqrt{t_n}\right)$, $\lim_{n\to+\infty} h'\left(\sqrt{t'_n}\right)$ θα βρούμε το πρώτο $-\infty$ και το δεύτερο $+\infty$. Αυτό σημαίνει ότι όχι απλώς η h' αλλάζει οσοδήποτε κοντά στο 0 πρόσημο αλλά και ότι οσοδήποτε κοντά στο 0 παίρνει απεριόριστα μεγάλες ή μικρές τιμές. Και επειδή η παράγωγος έχει την ιδιότητα των ενδιαμέσων τιμών (Θεώρημα Darboux) η h' παίρνει οσοδήποτε κοντά στο μηδέν οποιαδήποτε τιμή θέλουμε.



Η παράγωγος της h' της συνάρτησης (3)

Η χαρά της γενίκευσης. I

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

6 Δεκεμβρίου 2007

Περίληψη

Κάποιες ασκήσεις που τέθηκαν στο δικτυακό τόπο Mathematica[1] εξετάζονται από μία κάπως γενικότερη οπτική.

Από τον Κώστα Τηλέγραφο (kostas20000gr) προτάθηκαν οι παρακάτω ασκήσεις:

Ασκηση 1. *(Κώστας Τηλέγραφος) Να δείξετε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.*

Ασκηση 2. *(Κώστας Τηλέγραφος) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αν ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = 3 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Το μέλος nicspyros προσέθεσε στην πρώτη μερικά ακόμη ερωτήματα. Στη σχετική συζήτηση οι ασκήσεις αυτές λύθηκαν από αρκετά μέλη μεταξύ των οποιών και ο Γιάννης Παπανδρεόπουλος που συνέταξε για την πρώτη επιμελημένες λύσεις. Η επόμενη άσκηση συγκεντρώνει μερικά κύρια χαρακτηριστικά αυτών και άλλων ασκήσεων. Το τελευταίο ερώτημα της δεν απευθύνεται σε μαθητές. Στο ερώτημα αυτό ο Κώστας Σερίφης έστειλε μία πολύ αναλυτική απάντηση.

Ασκηση 3. *Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $g(f(x) = x$ για όλα τα x. Έστω ακόμη ότι η g είναι γνησίως μονότονη.*

1. *Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της g είναι το $\mathbb{R}$.*
2. *Να αποδείξετε ότι είναι $f^{-1} = g$.*
3. *Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.*
4. *Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη με ίδιο είδος μονοτονίας με της g.*
5. *Να αποδείξετε ότι οι g, f είναι συνεχείς.*

Αποδειξη.

1. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε αριθμός y είναι τιμή της g. Εισάγουμε το y στη σχέση $g(f(x) = x$ στη θέση του x και βρίσκουμε $g(f(y) = y$. Άρα το y είναι εικόνα του $f(y)$ μέσω της g.

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA

2. Η f είναι 1-1 διότι αν υποτεθεί ότι $f(x_1) = f(x_2)$ θα είναι $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Επομένως $x_1 = x_2$. Άρα η f είναι αντιστρέψιμη. Αλλά και η g είναι αντιστρέψιμη αφού είναι γνησίως μονότονη. Μάλιστα το πεδίο ορισμού της g^{-1} είναι το $\mathbb{R}$ αφού το σύνολο τιμών της g είναι το $\mathbb{R}$. Αν στη σχέση $g(f(x)) = x$ αντικαταστήσουμε στο β' μέλος όπου x το $g\left(g^{-1}(x)\right)$ θα βρούμε $g(f(x)) = g\left(g^{-1}(x)\right)$ που σημαίνει (η g είναι 1-1) ότι $f(x) = g^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις f και g^{-1} είναι ίσες. Άρα το αυτό θα συμβαίνει και με τις αντίστροφές τους. Άρα $f^{-1} = g$.

3. Το σύνολο τιμών της f συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της f^{-1} δηλαδή το πεδίο ορισμού της g δηλαδή το $\mathbb{R}$.

4. Η απόδειξη συνίσταται στο να αποδείξουμε ότι αντίστροφες συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας που είναι τυπική και γνωστή: Ας υποθέσουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα (η περίπτωση όπου η g είναι γνησίως φθίνουσα είναι παρόμοια). Θεωρούμε $x_1 < x_2$ από το πεδίο ορισμού της f δηλαδή από το $\mathbb{R}$. Θέλουμε $f(x_1) < f(x_2)$. Αν αυτό δεν ισχύει τότε

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{ή} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Αν εφαρμόσουμε την g στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε $x_1 = x_2$ και στη δεύτερη $x_1 > x_2$ (άτοπο). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

5. Αποδεικνύουμε την συνέχεια της g. Η συνέχεια της f αποδεικνύεται ανάλογα. Η ιδέα της απόδειξης περιέχεται σε ένα γενικότερο αποτέλεσμα σύμφωνα με το οποίο κάθε συνάρτηση που απεικονίζει διάστημα σε διάστημα και είναι γνησίως μονότονη είναι συνεχής: Θεωρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ και ένα διάστημα (A, B) που περιέχει το $g(x_0)$. Τα A, B είναι τιμές της g που αντιστοιχούν σε κάποια α, β. Θα είναι βέβαια $\alpha < x_0 < \beta$ και προφανώς για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ θα είναι $g(x) \in (A, B)$. Επομένως για κάθε περιοχή U του $g(x_0)$ υπάρχει περιοχή V του x_0 έτσι ώστε $g(V) \subseteq U$. Άρα η g είναι συνεχής.

Η χαρά της γενίκευσης. II

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

2 Δεκεμβρίου 2007

Περίληψη

Κάποιες ασκήσεις που τέθηκαν στο δικτυακό τόπο Mathematica[1] εξετάζονται από μία κάπως γενικότερη οπτική.

Ασκηση 1. *Εστω ότι οι f, g, h είναι ορισμένες στο ανοικτό διάστημα Δ και ότι*

1. *Οι f, g είναι γνησίως αύξουσες και η h γνησίως φθίνουσα.*
2. *Η g είναι συνεχής.*
3. *Για κάθε x ισχύει $(f(x) - g(x))(f(x) - h(x)) = 0$.*

Να αποδείξετε ότι $f = g$

Αποδειξη (Αργύρης Γαμβρέλλης)
Η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - h(x)$ είναι προφανώς γνησίως αύξουσα στο Δ, επομένως μηδενίζεται το πολύ μια φορά. Άρα:

$$\text{Ισχύει } f(x) - g(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \Delta \tag{1}$$

ή

$$\text{Ισχύει } f(x) - g(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \Delta - \{x_0\} \text{ και } f(x_0) - h(x_0) = 0 \tag{2}$$

Στην περίπτωση (1) έχουμε το ζητούμενο.
Στην περίπτωση (2), λόγω της μονοτονίας της f, και αφού Δ ανοικτό έχουμε ότι για κατάλληλα $\varepsilon > 0$ θα είναι:

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon) \Leftrightarrow g(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < g(x_0 + \varepsilon) \tag{3}$$

αφού $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \Delta - \{x_0\}$.
Όμως g συνεχής, άρα

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g(x_0 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} g(x_0 + \varepsilon) = g(x_0)$$

Από κριτήριο παρεμβολής και την (3), προκύπτει ότι $g(x_0) = f(x_0)$.
Άρα σε κάθε περίπτωση προκύπτει ότι $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA

Αλλη Αποδειξη [2]
Για δοθέν x θα ισχύει

$$f(x) = g(x) \tag{4}$$

ή

$$f(x) = h(x) \tag{5}$$

Παρατηρούμε ότι η (5) δε μπορεί να αληθεύει για δύο αριθμούς $\alpha < \beta$. Αυτό διότι τότε $f(\alpha) = h(\alpha) > h(\beta) = f(\beta)$ που αντιβαίνει στην υπόθεση μονοτονίας για την f. Αρα η (4) αληθεύει για όλα τα x εκτός ίσως από το ένα ας το πούμε α. Δηλαδή $f(\alpha) = h(\alpha)$. Θα δείξουμε ότι σε αυτή την περίπτωση είναι

$$h(\alpha) = g(\alpha) \tag{6}$$

και επομένως η (4) θα αληθεύει και για το α. Ας πούμε ότι η (6) δεν αληθεύει. Θα είναι

$$h(\alpha) > g(\alpha) \tag{7}$$

ή

$$h(\alpha) < g(\alpha) \tag{8}$$

Αν ισχύει η (7) τότε θα υπάρχει κάποιο $\beta > \alpha$ έτσι ώστε να είναι $h(\alpha) > g(\beta)$ (στην αντίθετη περίπτωση θα είναι $h(\alpha) \leq g(x)$ για όλα τα $x > \alpha$ και παίρνοντας όρια για $x \to \alpha^+$ βρίσκουμε ότι $h(\alpha) \leq g(\alpha)$, αφού η g είναι συνεχής, που αντιβαίνει στην (7 ». Για αυτό το β θα είναι $f(\alpha) = h(\alpha) > g(\beta) = f(\beta)$ που είναι άτοπο λόγω της μονοτονίας της f. Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι αποκλείεται η (8) εξασφαλίζοντας ότι για κάποιο $\beta < \alpha$ θα είναι $h(\alpha) < g(\beta)$ που θα μας οδηγήσει στο άτοπο συμπέρασμα $f(\beta) = g(\beta) > h(\alpha) = b(\alpha)$.

Σαν εφαρμογές μπορούμε να έχουμε τις ακόλουθες:

Ασκηση 2. *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου) Να βρεθεί η συνάρτηση f, αν $f^2(x) = x^2$ για κάθε x στο $\mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.*

Υποδειξη: Εφαρμογή της άσκησης 1 στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$

Ασκηση 3. *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου) Να βρείτε την γνησίως αύξουσα συνάρτηση f με $f^2(x) = e^{2x}$ για κάθε x στο $\mathbb{R}$.*

Ασκηση 4. *Να βρεθεί γνησίως αύξουσα συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f(x) + x)(f(x) - x^3) = 0$ για κάθε x.*

[2] Είναι η απόδειξη που είχα κατα νου πριν παρουσιάσω την Ασκηση 1 στο Mathematica. Η απόδειξη του Αργύρη Γαμβρέλλη είναι: α) η πρώτη που παρουσιάστηκε στο Mathematica και β) σαφώς κομψότερη.

Η χαρά της γενίκευσης. III

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

10 Δεκεμβρίου 2007

Περίληψη

Πρόκειται για μία γενίκευση δύο γνωστών ασκήσεων (η μία του σχολικού βιβλίου) που παρουσιάστηκε στον δικτυακό τόπο Mathematica[1]

Στο σημείωμα αυτό συζητούμε μία γενίκευση των παρακάτω ασκήσεων:

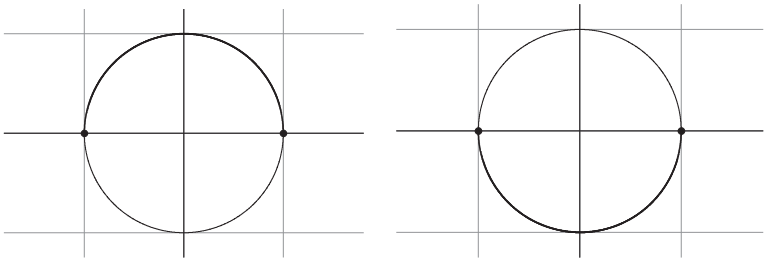
Άσκηση 1. *Να βρεθεί συνεχής συνάρηση f ορισμένη στο $[-1,1]$ για την οποία ισχύει $x^2+f^2(x)=1$ για όλα τα x.*

Πρόκειται ουσιαστικά για την άσκηση Β7, σελίδα 200, του σχολικού βιβλίου

Άσκηση 2. *Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε κάποιο διάστημα Δ για την οποία ισχύει $(f(x)-1)f(x)-2)=0$ για όλα τα x.*

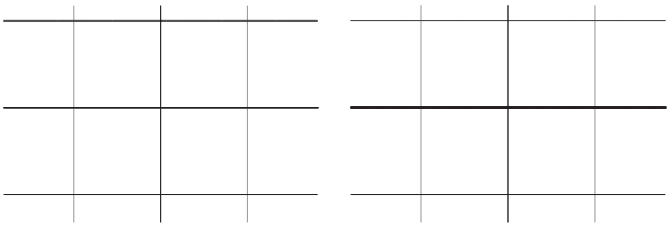
Η άσκηση αυτή υπάρχει με παραλλαγές σε πολλά βιβλία.

Συνήθως η πρώτη άσκηση λύνεται μέ κάποιο επιχείρημα διατήρησης προσήμου.



Οι δύο μοναδικές συνεχείς λύσεις της εξίσωσης $x^2+f^2(x)=1$:
Η $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ και $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$.

Η δεύτερη άσκηση συνήθως λύνεται με εφαρμογή του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής.



Οι δύο μοναδικές συνεχείς λύσεις της εξίσωσης $(f(x)-1)f(x)-2)=0$:
Η $f(x)=2$ και $f(x)=1$.

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA,

Η κεντρική ιδέα και των δύο ασκήσεων είναι ότι δε μπορεί μία συνεχής συνάρτηση να έχει γραφική παράσταση που διαμοιράζεται σε δύο ξένες γραφικές παραστάσεις δύο συνεχών συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα (το άνω και κάτω ημικύκλιο του μοναδιαίου κύκλου $x^2+y^2=1$ για τα x στο $(-1,1)$ στην πρώτη άσκηση και οι ευθείες $y=1$, $y=2$ στη δεύτερη. Οι δύο αυτές ασκήσεις και άλλες πολλές αποτελούν ειδική περίπτωση της:

Ασκηση 3. *Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις f, g, h που είναι ορισμένες στο διάστημα Δ και:*

1. *Οι γραφικές παραστάσεις των g,h δεν έχουν κοινά σημεία.*
2. *Ισχύει $(f(x)-g(x))(f(x)-h(x))=0$ για όλα τα x.*

Να αποδείξετε ότι $f=g$ ή $f=h$.

1η Αποδειξη (Αργύρης Γαμβρέλλης)
Από τη συνθήκη 2. προκύπτει ότι για κάθε $x_0\in\Delta$ θα ισχύει:

$$f(x_0)=g(x_0) \quad \text{ή} \quad f(x_0)=h(x_0) \tag{1}$$

Έστω ότι υπάρχουν $x_1<x_2$ στο Δ με $f(x_1)=g(x_1)$ και $f(x_2)=h(x_2)$.
Η συνάρτηση

$$z(x)=2f(x)-g(x)-h(x)$$

είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, με

$$z(x_1)=2f(x_1)-g(x_1)-h(x_1)=g(x_1)-h(x_1) \tag{2}$$

$$z(x_2)=2f(x_2)-g(x_2)-h(x_2)=h(x_2)-g(x_2) \tag{3}$$

Οι g, h είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και η εξίσωση $g(x)-h(x)=0$ είναι αδύνατη στο Δ. Επομένως, η συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-h(x)$ διατηρεί πρόσημο στο Δ, και χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $\varphi(x)>0$, για κάθε $x\in\Delta$. Τότε οι (2), (3) μας δίνουν ότι:

$$z(x_1)z(x_2)=\varphi(x_1)\left(-\varphi(x_2)\right)<0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$z(\xi)=0\Leftrightarrow 2f(\xi)-g(\xi)-h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{g(\xi)+h(\xi)}{2}$$

Λόγω της (1) ισχύει επίσης ότι

$$f(\xi)=g(\xi) \quad \text{ή} \quad f(\xi)=h(\xi)$$

οπότε ισχύει:

$$\frac{g(\xi)+h(\xi)}{2}=g(\xi) \quad \text{ή} \quad \frac{g(\xi)+h(\xi)}{2}=h(\xi)$$

δηλαδή $g(\xi)=h(\xi)$, άτοπο.
Επομένως ισχύει $f(x)=g(x)$, για κάθε $x\in\Delta$ ή $f(x)=h(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.
2η Αποδειξη (Κώστας Σερίφης) Κάνοντας τις πράξεις στην ισότητα:

$$(f(x)-g(x))(f(x)-h(x))=0$$

και κατόπιν με συμπλήρωση τετραγώνου προκύπτει:

$$\left(f(x)-\left(\frac{g(x)+h(x)}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{g(x)-h(x)}{2}\right)^2$$

και επομένως για δοθέν x θα είναι

$$f(x)-\left(\frac{g(x)+h(x)}{2}\right)=\pm\left(\frac{g(x)-h(x)}{2}\right)$$

Οι συναρτήσεις στα δύο μέλη είναι συνεχείς και, όπως εύκολα διαπιστώνεται, διάφορετικές του 0 για κάθε $x\in\Delta$, άρα διατηρούν σταθερό πρόσημο και έτσι προκύπτει ότι

$$f(x)=g(x)\quad \text{για κάθε}\quad x\in\Delta$$

ή

$$f(x)=h(x)\quad \text{για κάθε}\quad x\in\Delta$$

Η άσκηση αυτή είναι δύσκολη για μαθητές. Τα τελευταία χρόνια διδάσκω αυτή την άσκηση στους μαθητές μου (συνήθως στα μαθήματα επανάληψης) με την ακόλουθη μορφή:

Ασκηση 4.

Έστω g,h δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα Δ τέτοιες ώστε να ισχύει $g(x)\neq h(x)$ για κάθε $x\in\Delta$

1. *Να αποδείξετε ότι*
   - *ή θα ισχύει $g(x)>h(x)$ για όλα τα x*
   - *είτε θα ισχύει $h(x)<g(x)$ για όλα τα x*
2. *Έστω $f:\Delta\to\mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε να ισχύει*

   $$(f(x)-g(x))(f(x)-h(x))=0$$

   για όλα τα x.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι αν η $\mathcal{C}_f$ τέμνει τις $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_h$ σε σημεία με τεταμημένες x_1,x_2 τότε
   - *i. $x_1\neq x_2$*
   - *ii. Η εξίσωση*

     $$f(x)=\frac{g(x)+h(x)}{2}$$

     έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x_1,x_2.

   (β΄) Να αποδείξετε ότι
   - *ή θα ισχύει $f(x)=g(x)$ για όλα τα x*
   - *είτε θα ισχύει $f(x)=h(x)$ για όλα τα x*

Συνοπτικη Λυση

1. Η συνεχής συνάρτηση $g(x)-h(x)$ δεν έχει ρίζα στο Δ και επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο. Άρα ή θα είναι για όλα τα x θετική είτε θα είναι για όλα τα x αρνητική.

2. (α′) i. Είναι $f(x_1) = g(x_1)$ και $f(x_2) = h(x_2)$. Αν συνέβαινε $x_1 = x_2$ τότε θα ίσχυε $g(x_1) = h(x_1)$ και οι γραφικές παραστάσεις των g, h θα είχαν κοινό σημείο.

ii. Προκύπτει με εφαρμογή του θεωρήματος του Bolzano στο διάστημα με άκρα x_1, x_2 στη συνεχή συναρτηση

$$s(x) = f(x) - \frac{g(x) + h(x)}{2}$$

και αξιοποιώντας το ερώτημα 1.

(β′) Για δοθέν x το $f(x)$ θα είναι ίσο με $g(x)$ ή $h(x)$. Αν υποτεθεί ότι για κάποιο x ίσχυε το πρώτο και για κάποιο x ίσχυε το δεύτερο τότε η γραφική παράσταση της f θα έτεμνε τις γραφικές παραστάσεις των g, h. Από τα υποερωτήματα του (α′) προκύπτει ότι υπάρχει τιμή $f(x)$ της f που είναι ίση με $\frac{g(x)+h(x)}{2}$ η οποία όμως δε μπορεί να είναι ίση ούτε με $g(x)$ ούτε με $h(x)$ (άτοπο).

Η χαρά της γενίκευσης IV

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

14 Αυγούστου 2008

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Μπάμπης Στεργίου[1]). *Αν για τον μιγαδικό z ισχύει ότι:*

- $|z+1| \leq 1$
- $|z^2+1| \leq 1$
- $|z^3+1| \leq 1$

να αποδείξετε ότι

1. $\mathrm{Re}(z) <= 0$
2. $\mathrm{Re}(z^3) <= 0$
3. $z = 0$

ΛΥΣΗ

(ANDREW04, saruman01 Αλέξανδρος Συγκελάκης, Ιωάννης Παπανδρεόπουλος)

Υψώνοντας στο τετράγωνο την σχέση $|z+1| \leq 1$ μετά τις πράξεις βρίσκουμε $|z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) \leq 0$. Άρα $\mathrm{Re}(z) \leq 0$. Δουλεύοντας παρόμοια με την $|z^3+1| \leq 1$ βρίσκουμε ότι $\mathrm{Re}(z^3) \leq 0$. Επομένως:

$$z + \bar{z} \leq 0 \tag{1}$$

και

$$z^3 + \bar{z}^3 \leq 0 \tag{2}$$

Αν συνέβαινε $z + \bar{z} < 0$ τότε

$$z^3 + \bar{z}^3 = (z+\bar{z})^3 - 3(z+\bar{z})z\bar{z} = (z+\bar{z})\left((z+\bar{z})^2 - 3z\bar{z}\right)$$

και επομένως

$$(z+\bar{z})^2 \geq 3z\bar{z} \tag{3}$$

Από την σχέση $|z^2+1| \leq 1$ πάλι με ύψωση στο τετράγωνο βρίσκουμε τελικά ότι

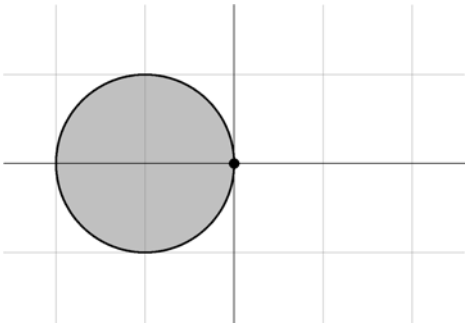
$$(z+\bar{z})^2 \leq 2z\bar{z} - (z\bar{z})^2 \tag{4}$$

Από τις (3), (4) έχουμε $3z\bar{z} \leq 2z\bar{z} - (z\bar{z})^2$ από την οποία προκύπτει ότι $(z\bar{z})^2 + z\bar{z} \leq 0$ δηλαδή $z\bar{z}(z\bar{z}+1) \leq 0$ οπότε (επειδή και οι δύο παράγοντες είναι πραγματικοί και $z\bar{z}+1 > 0$, παίρνουμε $z\bar{z} \leq 0$ δηλαδή $|z|^2 \leq 0$ άρα $|z| = 0$ και $z = 0$ (άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι $z + \bar{z} < 0$.

Επομένως θα ισχύει $z + \bar{z} = 0$ οπότε $z = yi, y \in \mathbb{R}$. Η υπόθεση $|1+z| \leq 1$ μας δίνει $1 + y^2 \leq 1$ από την οποία έχουμε $y = 0$. Άρα $z = 0$

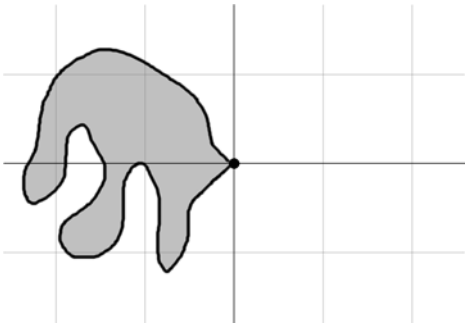
Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω άσκηση οι υποθέσεις μας λένε ότι ο z πρέπει να είναι τέτοιος ώστε οι z, z^2, z^3 να ανήκουν στον κυκλικό δίσκο με κέντρο την εικόνα του -1 και ακτίνα 1. Το μόνο σημείο όμως του δίσκου αυτού που έχει αυτή την ιδιότητα είναι το 0.

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/1063887?read=214&forum=75223



Αυτό μπορεί εύκολα να το μαντέψει κανείς αν σκεφθεί με ορίσματα[2] αλλά για την απόδειξη τα ορίσματα δεν είναι απαραίτητα. Έτσι μπορούμε να έχουμε την εξής πιό γενική άσκηση:

Ασκηση 2. *Έστω Σ ένα χωρίο του μιγαδικού επιπέδου το οποίο περιέχεται στο αριστερό ημιεπίπεδο από εκείνα που ορίζει ο άξονας των φανταστικών αριθμών (δηλαδή εκείνο από τα ημιεπίπεδα που ορίζει ο $y'y$ το οποίο περιέχει τον αρνητικό ημιάξονα των x). Υποθέτουμε ότι για ένα στοιχείο z του Σ τα z, z^2, z^3 ανήκουν στο Σ. Να αποδειχθεί ότι το πραγματικό μέρος του z είναι 0.*



Λυση

Έστω ότι $z = \alpha + \beta i$. Θα είναι βέβαια $\mathrm{Re}\,(z) \leq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $\mathrm{Re}\,(z) < 0$. Έχουμε: $\mathrm{Re}\,(z) = \alpha$, $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = \alpha^2 - \beta^2$, $\mathrm{Re}\left(z^3\right) = \alpha^3 - 3\alpha\beta^2$. Τότε συγχρόνως ισχύουν οι

$$\alpha < 0 \ \ (i)$$

$$\alpha^2 - \beta^2 \leq 0 \ \ (ii)$$

$$\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 \leq 0 \ \ (iii)$$

Η (ii) μας δίνει ότι $\beta^2 \geq \alpha^2 > 0$ επομένως. Η (iii) βάσει της (i) μας δίνει ότι $\alpha^2 \geq 3\beta^2$ οπότε $\alpha^2 \geq 3\beta^2 > \beta^2$ που έρχεται σε αντίθεση με την (ii). Άρα αναγκαστικά $\mathrm{Re}\,(z) = 0$

Εφαρμογη: Στην προηγούμενη άσκηση το Σ είναι ο κυκλικός δίσκος και επειδή πρέπει $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ και το μόνο σημείο του δίσκου με αυτή την ιδιότητα είναι το 0 έχουμε ότι $z = 0$.

[2] Παρόμοια σκέψη διατύπωσε σε μήνυμα του ο Αποστόλης Παπαδογιαννάκης

Η χαρά της γενίκευσης V

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

17 Αυγούστου 2008

Περίληψη

Στο σημείωμα αυτό συζητείται μία άσκηση που έθεσε ο Θωμάς Ραϊκόφτσαλης (www.mathjazz.com) στον δικτυακό τόπο MATHEMATICA (http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/1063887?read=214&forum=75223) και μία μικρή γενίκευση της.

ΑΣΚΗΣΗ 1. *(Θωμάς Ραϊκόφτσαλης) Για $x > 0$ να λυθεί η εξίσωση*

$$x^2 + 2^x = x^x + 4$$

ΛΥΣΗ (Θωμάς Ραϊκόφτσαλης) Η εξίσωση $x^2 + 2^x = x^x + 4$ έχει προφανή λύση $x = 2$. Θα δείξουμε ότι η λύση αυτή είναι και μοναδική. Έχουμε: $x^x - x^2 = 2^x - 2^2 \Rightarrow x^2\left(x^{x-2} - 1\right) = 2^2\left(2^{x-2} - 1\right) \Rightarrow \frac{x^2}{2^2} = \frac{x^{x-2}-1}{2^{x-2}-1} \Rightarrow$ δηλαδή

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2^{x-2} - 1}{x^{x-2} - 1} \quad (1)$$

Για $x > 2$ έχουμε: $1 < \frac{x}{2} \Rightarrow 1 < \left(\frac{x}{2}\right)^2$ και $x^{x-2} - 1 > 2^{x-2} - 1 \Rightarrow \frac{2^{x-2}-1}{x^{x-2}-1} < 1$, οπότε τελικά η (1) μας δίνει: $1 < \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2^{x-2}-1}{x^{x-2}-1}$, άτοπο.
Για $x < 2$ έχουμε: $1 > \frac{x}{2} \Rightarrow 1 > \left(\frac{x}{2}\right)^2$, και $x^{x-2} - 1 > 2^{x-2} - 1 \Rightarrow \frac{2^{x-2}-1}{x^{x-2}-1} > 1$, οπότε τελικά η (1) μας δίνει: $1 > \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2^{x-2}-1}{x^{x-2}-1}$, άτοπο.
Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x = 2$.

Η Άσκηση 1 μπορεί προκύψει σαν εφαρμογή της:

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε ζεύγος θετικών αριθμών x, y ισχύει $x^x + y^y \geq x^y + y^x$ και ότι το «=» ισχύει μόνο όταν $x = y$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 1 Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^x + y^y - x^y - y^x$ με $y > 0$ ορισμένη στο $(0, +\infty)$ (στην πραγματικότητα πρόκειται για οικογένεια συναρτήσεων f_y). Είναι $f'(x) = (x^x \ln x - y^x \ln y) + \left(x^x - x^{y-1}y\right)$ και
$x > y \Rightarrow f'(x) > (y^x \ln y - y^x \ln y) + \left(x^{y-1}y - x^{y-1}y\right) \Rightarrow f'(x) > 0$
$x < y \Rightarrow f'(x) < (y^x \ln y - y^x \ln y) + \left(x^{y-1}y - x^{y-1}y\right) \Rightarrow f'(x) < 0$
Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως αύξουσα στα $(0, y), (y, +\infty)$ αντιστοίχως και έχει ελάχιστη τιμή το 0 για $x = y$.

Αποδειξη 2 (Θωμάς Ραϊκόφτσαλης) **i.** Για $x=y$ ισχύει προφανώς η ισότητα.
ii. Για $x\neq y$ αρκεί να δείξουμε ότι: $x^x-x^y\geq y^x-y^y$ (2)
α. Για $x>y$ η (2) γίνεται:

$$x^y(x^{x-y}-1)\geq y^y(y^{x-y}-1)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^y\geq\frac{y^{x-y}-1}{x^{x-y}-1}\ (3)$$

Αφού x,y θετικοί έχουμε:
$\frac{x}{y}>1\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^y>1$ και $y^{x-y}<x^{x-y}\Rightarrow y^{x-y}-1<x^{x-y}-1\Leftrightarrow\frac{y^{x-y}-1}{x^{x-y}-1}<1$,
οπότε η σχέση (3) ισχύει ως γνήσια ανισότητα, δηλαδή για $x>y$ ισχύει $\left(\frac{x}{y}\right)^y>\frac{y^{x-y}-1}{x^{x-y}-1}$
β. Για $0<x<y$ η ζητούμενη σχέση παίρνει τη μορφή

$$y^y-y^x\geq x^y-x^x\Leftrightarrow y^x(y^{y-x}-1)\geq x^x(x^{y-x}-1)\Rightarrow\left(\frac{y}{x}\right)^x\geq\frac{x^{y-x}-1}{x^{y-x}-1}\ (4)$$

Οπότε με ακριβώς όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι η σχέση (4) ισχύει ως γνήσια ανισότητα, δηλαδή για $x>y$ ισχύει $\left(\frac{y}{x}\right)^x>\frac{x^{y-x}-1}{x^{y-x}-1}$
Αποδειξη 3 (antonis_math) Για $x=y$ η αποδεικτέα αληθεύει σαν ισότητα. Έστω $x\neq y$. Τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x>y$. Ευκολα διαπιστώνουμε ότι η αποδεικτέα πρόταση ισοδυναμεί με την

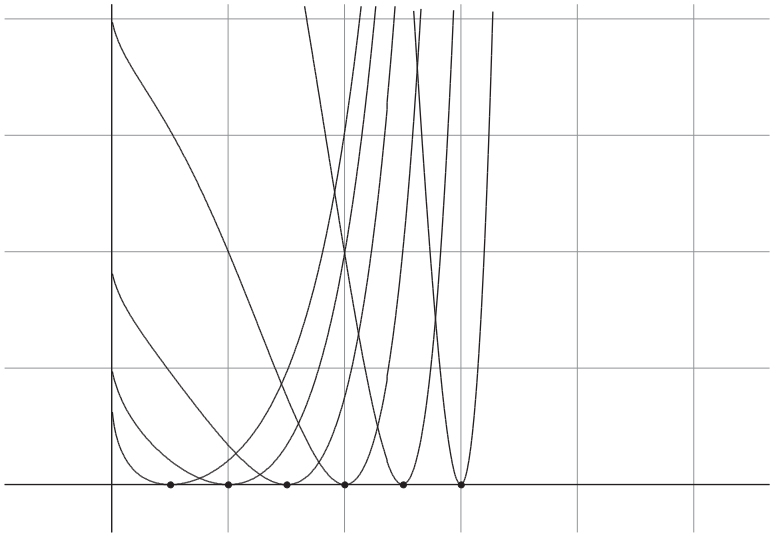
$$\left(\frac{x}{y}\right)^y\left(\frac{x^x}{x^y}-1\right)>y^{x-y}-1$$

Προφανώς $\left(\frac{x}{y}\right)^y>1$ επομένως αρκεί να αποδειχθεί ότι $\frac{x^x}{x^y}-1>y^{x-y}-1$ η οποία ισχύει αφού

$$\frac{x^x}{x^y}-1>y^{x-y}-1\Leftrightarrow\frac{x^x}{x^y}>\frac{y^x}{y^y}\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^x>\left(\frac{x}{y}\right)^y$$

και η τελευταία σχέση ισχύει αφού $\frac{x}{y}>1$ και $x>y$.

Μερικά στοιχεία (για $y=1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2,\ 5/2,\ 3$) της οικογένειας των συναρτήσεων $f_y(x)=x^x+y^y-x^y-y^x$ διακρίνονται στο επόμενο σχήμα:



Με Αφορμή μία Άσκηση στην Συνέχεια

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

18 Δεκεμβρίου 2008

Περίληψη

Στον δικτυακό τόπο Mathematica [1] με αφορμή μία άσκηση που έθεσε το μέλος dement προκλήθηκε μία γόνιμη συζήτηση που επιχειρείται να καταγραφεί στα επόμενα.

ΑΣΚΗΣΗ 1. *(dement) Εστω συνεχης συναρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τετοια ωστε, για καθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχυει*

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

Να αποδειχθει οτι η f ειναι επι.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 1 (Θωμάς Ραϊκόφτσαλης) Η f είναι 1-1: Αν $f(x) = f(y)$ τότε από την υπόθεση έχουμε: $0 \geq |x - y| \geq 0$, άρα $x = y$. Αφού η f είναι συνεχής και 1-1 στο $\mathbb{R}$ είναι και γνησίως μονότονη.
Α) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε

- για $x > 0$ η αρχική δίνει: $f(x) - f(0) \geq x$ οπότε $f(x) \geq f(0) + x$, και περνώντας στα όρια έχουμε όριο της f στο $+\infty$ είναι $+\infty$.
- για $x < 0$ η αρχική δίνει $-f(x) + f(0) \geq -x$, οπότε όπως πριν βρίσκουμε ότι το όριο της f στο $-\infty$ είναι $-\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.
Β) Αν η f γνήσιως φθίνουσα για $x > 0$ έχουμε $f(0) - f(x) \geq x$ και για $x < 0$ έχουμε $f(x) - f(0) \geq -x$ οπότε εργαζόμενοι όμοια έχουμε ότι τα όρια της f στα $-\infty$, $+\infty$ είναι $+\infty$, $-\infty$ οπότε πάλι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. ■

Πρόκειται για ωραία άσκηση που αξίζει της προσοχής μας. Έχει τεθεί και ως θέμα στις εξετάσεις του πανεπιστημίου του Berkeley (Berkeley Preliminary Exams) του έτους 1991[2]. Η επιτυχία στις εξετάσεις αυτές (που καλύπτουν όλο το φάσμα της προπτυχιακής ύλης) αποτελεί προαπαιτούμενο για την εκπόνηση διδακτορικής διατριβής (!!). Οι Souza, Silva έχουν συγκεντρώσει σε βιβλίο με τίτλο « Berkeley Problems in Mathematics» (εκδοση Springer) τα θέματα των εξετάσεων αυτών μαζί με τις λύσεις τους. Η λύση που προτείνουν οι Souza, Silva στο βιβλίο τους χρησιμοποιεί το ίδιο λήμμα με την λύση του Θ. Ραϊκόφτσαλη (: κάθε συνάρτηση 1-1 και συνεχής σε διάστημα είναι γνησίως μονότονη) αλλά υπολείπεται κατά πολυ σε απλότητα. Η λύση τους όμως έχει ένα πολύ γουστόζικο

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/1063887?read=583&forum=75223
[2] βλ. http://math.berkeley.edu/~ desouza/Prelims/Fall91/Fall91.html

επιχείρημα και γιαυτό την αναφέρω. Είναι περίπου η εξής:

Απόδειξη 2 (Souza, Silva) Η f είναι προφανώς 1-1 και αφού είναι συνεχής είναι και γνησίως μονότονη. Άρα το $S = f(\mathbb{R})$ είναι ένα ανοικτό διάστημα. Έστω μία συγκλίνουσα ακολουθία (y_n) από το S. Αφού είναι συγκλίνουσα είναι Cauchy. Αλλά υπάρχουν μοναδικά x_n από το $\mathbb{R}$ ώστε $y_n = f(x_n)$ και είναι $|y_n - y_m| = |f(x_n) - f(x_m)| \geq |x_n - x_m|$. Επομένως και η x_n είναι Cauchy. Αλλά τότε $x_n \to x$ για κάποιο x και λόγω συνεχείας $y_n = f(x_n) \to f(x)$. ■

Αυτό σημαίνει ότι το $S = f(\mathbb{R})$ είναι και κλειστό. Οπότε αναγκαστικά θα είναι $f((\mathbb{R}) = \mathbb{R}$!! Αυτό αφού τα μόνα κλειστά και ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, στη συνήθη τοπολογία είναι το $\mathbb{R}$ και το κενό.

Επειδή η άσκηση αυτή μου αρέσει την δίνω με τις σημειώσεις μου και, που και που, την διδάσκω έχω γράψει μία «σχολική λύση» που συνοπτικά είναι η εξής:

Απόδειξη 3 Αν μία συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ το ίδιο συμβαίνει και με την $f + c$ όπου c είναι οποιαδήποτε σταθερά. Ακόμη αν μία συνάρτηση εχει την ιδιότητα

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

την ίδια ιδιότητα έχει και η $f + c$. Επομένως μπορούμε να δουλέψουμε με την $g = f - f(0)$ για την οποία φυσικά ισχύει

$$|g(x) - g(y)| \geq |x - y|(*)$$

και ακόμη $g(0) = 0$. Προφανώς η g είναι 1-1. Θα δείξουμε ότι κάθε m είναι τιμή της. Υποθέτουμε ότι $m > 0$ (η περίπτωση $m < 0$ αντιμετωπίζεται ανάλογα). Οι αριθμοί $g(-m), g(m)$ είναι μη μηδενικοί. Αν ήσαν ομόσημοι λ.χ. θετικοί τότε για κάθε y μεταξύ 0 και $\min(g(-m), g(m))$ θα θα υπήρχαν x_1, x_2 με $-m < x1 < 0 < x2 < m$ ώστε $g(x_1) = g(x_2) = y$ (άτοπο). Επομένως οι $g(-m), g(m)$ είναι ετερόσημοι. Από την $(*)$ έχουμε $|g(m) - g(0)| \geq |m - 0|$ και $|g(-m) - g(0)| \geq |-m - 0|$. Δηλαδή:

$$|g(m)| \geq m > g(0) \quad \text{και} \quad |g(-m)| \geq m > g(0)$$

Όμως κάποιος από τους $g(-m), g(m)$ είναι θετικός και επομένως επιτυγχάνουμε να έχουμε το m μεταξύ δύο τιμών της g άρα είναι τιμή της g. ■

Κρίνοντας ότι είναι κάπως σχετική έθεσα σε συζήτηση την ακόλουθη άσκηση που υπήρξε θέμα στην Κινέζικη Μαθηματική Ολυμπιάδα:

Ασκηση 2. *(Κινέζικη Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1983) Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη στο $[0, 1]$ για την οποία είναι γνωστό ότι $f(0) = f(1)$ και για κάθε $x \neq y$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. Δείξτε ότι για όλα τα x, y ισχύει $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$.*

Απόδειξη 1 (Θωμάς Ραϊκόφτσαλης) Αν $|x-y| \leq \frac{1}{2}$ τότε από τη σχέση $|f(x)-f(y)| < |x-y|$ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$ δηλαδή το αποδεικτέο.
Ας υποθέσουμε ότι $|x - y| > 1/2$. Ονομάζουμε $f(0) = f(1) = \alpha$. Στην δοθείσα σχέση θέτουμε $x = 1$ και μετά $y = 0$ και έχουμε:

- Για $x = 1$: $|f(y) - \alpha| \leq |y - 1|$ από την οποία προκύπτει $|f(y) - \alpha| \leq 1 - y$ για κάθε $y \in [0, 1]$, οπότε τελικά

$$y - 1 + a \leq f(y) \leq 1 - y + \alpha \tag{1}$$

- Για $y = 0$: $|f(0) - f(x)| \leq |0 - x|$ οπότε $|a - f(x)| \leq x$ για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα

$$-x - \alpha \leq -f(x) \leq x - \alpha \tag{2}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) έχουμε

$$y - x - 1 \leq f(y) - f(x) \leq 1 - (y - x) \tag{3}$$

Αλλά έχουμε υποθέσει ότι $|x - y| > \frac{1}{2}$. Αν $x < y$ θα έχουμε $y - x > \frac{1}{2}$ και η (3) μας δίνει:

$$\frac{1}{2} - 1 < (y - x) - 1 \leq f(y) - f(x) <= 1 - (y - x) \leq 1 - \frac{1}{2}$$

άρα

$$-\frac{1}{2} < f(y) - f(x) < \frac{1}{2}$$

και τελικά

$$|f(y) - f(x)| < \frac{1}{2}$$

Όμοια εργαζόμαστε και αν $x > y$. ■

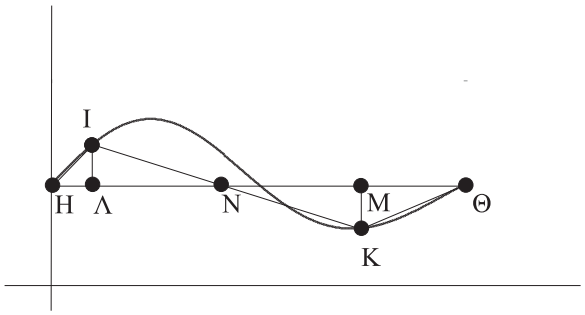
Αποδειξη 2 (Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Η σχεση $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ ισοδυναμεί με την

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < 1$$

δηλαδή ο συντελεστης διεύθυνσεως μια χορδής με ακρα $(x, f(x))$ και $(y, f(y))$ κυμαίνεται από -1 εως 1 επομένως η κάθε χορδή σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία

$$\varphi < \frac{3\pi}{4} \quad \text{ή} \quad \varphi < \frac{\pi}{4}$$

(Στο παρακατω σχήμα ολες οι χορδες όταν σχηματίζουν εσωτερική γωνία τριγώνου αυτή είναι μικρότερη των 45 μοιρών)



Εστω $H(0, f(0))$ και $\Theta(1, f(1))$. Ας υποθέσουμε ότι το αποδεικτέο δεν αληθεύει. Θα υπάρχουν τότε αριθμοί ι και κ από το $(0, 1))$ ώστε

$$f(\iota) - f(\kappa)| > 1/2 \quad (\Upsilon)$$

Θεωρούμε τα σημεία $I(\iota, f(\iota))$ και $K(\kappa, f(\kappa))$ καθώς και τις προβολές τους Λ και M πάνω στον $x'x$. Αφού $f(0) = f(1)$ ισχύε $(H\Theta) = 1$. Ειναι $\Lambda N > I\Lambda$ αφού $\widehat{IN\Lambda} < \frac{\pi}{4}$ άρα $\epsilon\phi\widehat{IN\Lambda} = \frac{IA}{AN} < 1$ άρα

$$LN > I\Lambda \tag{4}$$

Ομοια από το τριγωνο NMK έχουμε

$$NM > MK \tag{5}$$

Από τις (4)(5) έχουμε: $LN + NM > I\Lambda + MK = |f(\iota) - f(\kappa)| > \frac{1}{2}$ δηλαδή

$$\Lambda N + NM > \frac{1}{2} \tag{6}$$

Από (Υ) για τη χορδή HI στο τριγωνο $IH\Lambda$ έχουμε

$$H\Lambda > I\Lambda \tag{7}$$

Και ομοια στο $MK\Theta$ είναι

$$M\Theta > MK \tag{8}$$

οπότε από (7),(8) έχουμε $M\Theta + H\Lambda > I\Lambda + MK = |f(\iota) - f(\kappa)| > \frac{1}{2}$ δηλαδή

$$M\Theta + H\Lambda > \frac{1}{2} \tag{9}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (6),(9) έχουμε $\Lambda N + NM + M\Theta + H\Lambda > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ δηλαδή $(H\Theta) > 1$ που είναι άτοπο αφού $(H\Theta) = 1$.
Παρατηρηση 1 Αν η συνάρτηση είναι σταθερή προφανώς ισχύει το ζητούμενο
Παρατηρηση 2 Αν το K ταυτιστεί με το Θ η άσκηση ισοδυναμεί με την παρακάτω που είναι ευκολότερη. Δίδεται τρίγωνο με βάση μήκους 1. Αν οι προσκείμενες στη βάση γωνίες φ και φ είναι μικρότερες των 45 μοιρων (ή $\varphi < 45$ και $\omega > 135$) να δειχθεί ότι το υψος που αντιστοιχει στη βάση ειναι μικρότερο του $\frac{1}{2}$. ■

Ο Θωμάς Ραϊκόφτσαλης πρότεινε επισης την ακόλουθη σχετική άσκηση:

Ασκηση 3. *(Θωμάς Ραϊκόφτσαλης) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει*

$$|f(x) - f(y)|^2 \leq |x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x_0) = x_0$.

Αποδειξη (Χρήστος Κυριαζής) Από την υπόθεση έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|}$$

από την οποία με την βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής προκύπτει ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Θέτοντας όπου y το 0 έχουμε: $|f(x) - f(0)| \leq \sqrt{|x|}$ γιά κάθε για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αρα

$$f(0) - \sqrt{|x|} \leq f(x) \leq f(0) + \sqrt{|x|} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \tag{10}$$

Στη συνέχεια θα αποκλείσουμε τις περιπτώσεις $f(x) > x$ γιά κάθε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) < x$, γιά κάθε για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω λοιπόν ότι

$$f(x) > x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \tag{11}$$

Αφου οι (10), (11) ισχύουν για όλα τα x θα ισχύουν και για το 0 (οπότε $f(0) \geq > 0$) και το $x_1 = (f(0)+1)^2 > 0$. Τότε, λόγω των (10), (11) έχουμε: $x_1 < f(x_1) \leq f(0) + \sqrt{x_1})$ ή καλύτερα $[f(0)+1]^2 < 2f(0)+1$ που τελικά δίνει $f(0)^2 < 0$. Άτοπο. Άρα θα υπάρχει k_1 στο $\mathbb{R}$ ώστε $f(k_1) < k_1$. Όμοια (δουλεύοντας με το $x_2 = -(1-f(0))^2 < 0$) εξασφαλίζουμε ότι υπάρχει k_2 στο $\mathbb{R}$ ώστε $f(k_2) >= k_2$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την $g(x) = f(x) - x$ στο διάστημα με άκρα k_1, k_2 έχουμε το αποδεικτέο. ■

Μία ιδιότητα της έλλειψης

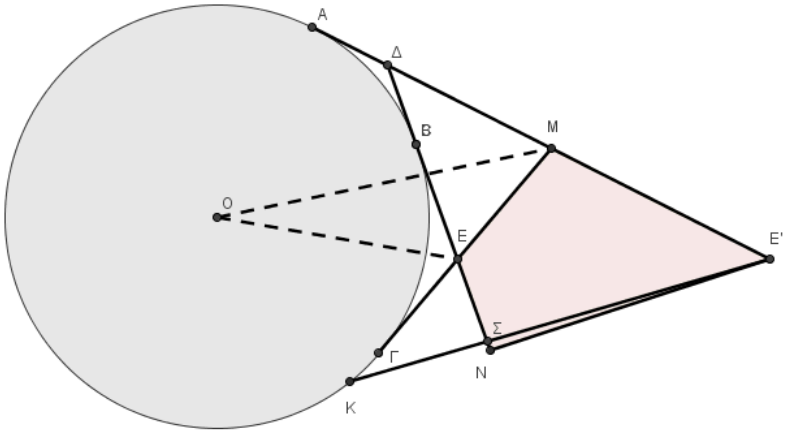
Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

15 Φεβρουαρίου 2008

Ασκηση 1. *(varverak)* [1] *Αν Μ, Ν είναι σημεία έλλειψης με εστίες Ε και Ε′, τότε οι ευθείες ΜΕ, ΜΕ′, ΝΕ και ΝΕ′ είναι εφαπτόμενες ενός κύκλου.*

Λυση

Ας πούμε ότι το ΜΕΝΕ′ είναι κυρτό (η περίπτωση μη κυρτού αντιμετωπίζεται ανάλογα). Με κέντρο το κοινό σημείο Ο των διχοτόμων της εξωτερικής του γωνίας του Μ και της εσωτερικής γωνίας του Ε και ακτίνα την απόσταση του Ο από την ΜΕ′ γράφουμε κύκλο. Αυτός εφάπτεται στις ΜΕ′, ΜΕ, ΕΝ στα Δ, Γ, Ε αντιστοίχως. Θα δείξουμε ότι εφάπτεται και στην Ε′Ν. Αν όχι φέρνουμε την εφαπτομένη Ε′Κ από το Ε′ η οποία τέμνει την ΕΝ στό Σ.



Έχουμε:
$\mathrm{E'\Sigma} = \mathrm{E'K} - \Sigma\mathrm{K} = \mathrm{E'A} - \Sigma\mathrm{B} = \mathrm{ME'} + \mathrm{MA} - \Sigma\mathrm{E} - \mathrm{EB} = \mathrm{ME'} + \mathrm{M\Gamma} - \Sigma\mathrm{E} - \mathrm{E\Gamma} = \mathrm{ME'} - \Sigma\mathrm{E} + (\mathrm{M\Gamma} - \mathrm{E\Gamma}) = \mathrm{ME'} - \Sigma\mathrm{E} + \mathrm{ME} = \mathrm{NE'} + \Sigma\mathrm{N}$
Αρα $\mathrm{E'\Sigma} = \mathrm{NE'} + \Sigma\mathrm{N}$ (άτοπο)

[1] Τέθηκε στον δικτυακό τόπο Mathematica (http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA) από το μέλος varverak

Πότε ισχύει $\alpha^x + \beta^x \geq \gamma^x + \delta^x$ για κάθε x;

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

23 Σεπτεμβρίου 2007

Περίληψη

Στο δικτυακό τόπο συνάντησης Mathematica[1] τέθηκαν κάποια ερωτήματα σχετικά με ένα θέμα του 2004. Το παρόν είναι μία μικρή συμβολή στη συζήτηση

Ασκηση 1. *Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι θετικοί αριθμοί να αποδειχθεί ότι ισχύει*

$$\alpha^x + \beta^x \geq \gamma^x + \delta^x$$

για όλα τα x αν και μόνο αν

$$\alpha\beta = \gamma\delta \quad \textit{και} \quad \alpha + \beta \geq \gamma + \delta$$

Λυση

Για Το Ευθυ. Έστω ότι $\alpha^x + \beta^x \geq \gamma^x + \delta^x$ για όλα τα x. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x + \beta^x - \gamma^x - \delta^x$ ορισμένη στο ανοικτό διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι είναι παραγωγίσιμη ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για όλα τα x και ότι $f(0) = 0$. Άρα παρουσιάζει ακρότατο στο 0 και επομένως η παράγωγος της $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha + \beta^x \ln\beta - \gamma^x \ln\gamma - \delta^x \ln\delta$ μηδενίζεται για $x = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $\ln\alpha + \ln\beta - \ln\gamma - \ln\delta = 0$ από την οποία εύκολα συνάγεται ότι $\alpha\beta = \gamma\delta$. Επίσης θα είναι $f(1) \geq 0$ από την οποία προκύπτει ότι $\alpha + \beta - \gamma - \delta \geq 0$ δηλαδή $\alpha + \beta \geq \gamma + \delta$.
Για Το Αντιστροφο. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι

$$\alpha\beta = \gamma\delta \tag{1}$$

$$\alpha + \beta \geq \gamma + \delta \tag{2}$$

Αν η (2) ισχύει σαν ισότητα τότε οι α, β καθώς και οι γ, δ είναι ρίζες της $t^2 - (\alpha + \beta)t + \alpha\beta = 0$ επομένως θα είναι ανά δύο ίσοι (όχι κατ' ανάγκην με την σειρά αναγραφής) και σε κάθε περίπτωση θα είναι $\alpha^x + \beta^x = \gamma^x + \delta^x$.
Αν η (2) ισχύει σαν γνήσια ανισότητα τότε κάποιος από τους α, β θα είναι μεγαλύτερος από κάποιον από τους γ, δ αφού στην ενάντια περίπτωση θα είχαμε $\alpha + \beta \leq \gamma + \delta$. Ας πούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\alpha > \gamma$. Έστω $\frac{\alpha}{\gamma} = \lambda > 1$. Τότε από την (1) θα είναι

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\beta} = \lambda > 1$$

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA

και επομένως $\alpha=\lambda\gamma$ και $\delta=\lambda\beta$. Ακόμη από την (2) έχουμε ότι $\lambda\gamma+\beta>\gamma+\lambda\beta$ και επομένως $(\lambda-1)(\gamma-\beta)>0$. Αφού είναι $\lambda>1$ θα είναι και $\gamma-\beta>0$ δηλαδή $\frac{\gamma}{\beta}>1$.
Η παράσταση $\alpha^x+\beta^x-\gamma^x-\delta^x$ γράφεται:

$$(\lambda\gamma)^x+\beta^x-\gamma^x-(\lambda\beta)^x$$

δηλαδή

$$\beta^x\left(\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^x-1\right)(\lambda^x-1)$$

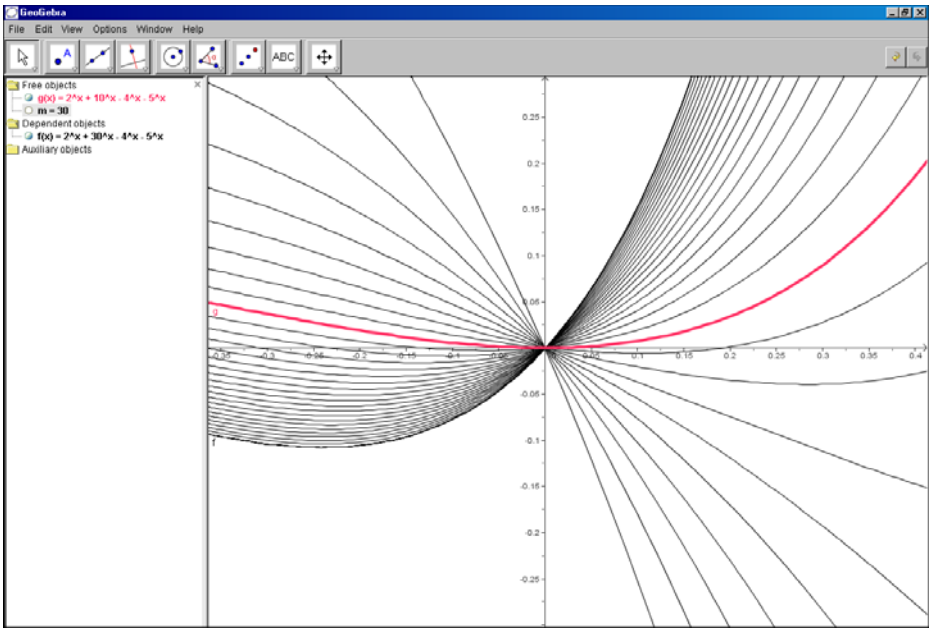
Διακρίνοντας τις περιπτώσεις $x=0$, $x>0$, $x<0$ συμπεραίνουμε εύκολα ότι είναι πάντα $f(x)\geq 0$ και επομένως για όλα τα x ισχύει $\alpha^x+\beta^x\geq\gamma^x+\delta^x$.

ΑΣΚΗΣΗ 2. *(Από τις επαναληπτικές εξετάσεις του 2004) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2^x+m^x-4^x-5^x$ όπου $m\in\mathbb{R}$, $m>0$. Να βρείτε τον m ώστε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.*

ΛΥΣΗ

ΠΡΩΤΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Αυτοτελώς, η γνωστή λύση όπου επιπλέον στο τέλος επαληθεύεται ότι όντως η τιμή $m=10$ έχει την ιδιότητα να κάνει την f μη αρνητική δηλαδή ότι ισχύει $(2^x-5^x)(1-2^x)\geq 0$ που διαπιστώνεται εύκολα με διάκριση περιπτώσεων.
ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση. Θέλουμε $2^x+m^x\geq 4^x+5^x$ για όλα τα x που ισοδυναμεί με τις $2\cdot m=4\cdot 5$ και $2+m\geq 4+5$ που ασφαλώς επαληθεύονται από την $m=10$.

Στο σχήμα παριστάνονται[2] μερικά μέλη της οικογένειας συναρτήσεων $f_m(x)=2^x+m^x-4^x-5^x$ για ακέραιες τιμές του m μεταξύ 1 και 30. Η χαραγμένη με κόκκινο καμπύλη αντιστοιχεί στην τιμή $m=10$.



[2] Η γραφική παράσταση έγινε με το πρόγραμμα Geogebra

Άλλη μία άσκηση με πεδίο ορισμού ολοκληρώματος

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

26 Φεβρουαρίου 2008

Άσκηση 1 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$\int_{(x-1)(x-3)}^{(x-2)(x-4)} \ln(xt)\, dt$$

Απαντηση: Ας ονομάσουμε $g_x(t) = \ln(xt)$. Το πεδίο ορισμού της g_x είναι το $(0, +\infty)$ αν είναι $x > 0$ και το $(-\infty, 0)$ αν είναι $x < 0$. Για $x = 0$ η g_x δεν ορίζεται.

1. Ας υποθέσουμε ότι $x > 0$. Τότε πρέπει τα άκρα ολοκλήρωσης

   $$(x-1)(x-3),\ \ (x-2)(x-4)$$

   να ανήκουν στο διάστημα $(0, +\infty)$ δηλαδή να είναι και τα δύο θετικά. Αυτό ισχύει όταν $x > 4$ ή όταν $0 < x < 1$.

2. Ας υποθέσουμε ότι $x < 0$. Τότε πρέπει

   $$(x-1)(x-3) < 0,\ \ (x-2)(x-4) < 0$$

   που ισχύει όταν $2 < x < 3$ που δεν συναληθεύουν όμως την $x < 0$. Επομένως δεν υπάρχουν αρνητικά x στο πεδίο ορισμού.

Επομένως το πεδίο ορισμού είναι το $(0, 1) \cup (4, +\infty)$.

Άσκηση 2 [Παραλλαγή από τον Κώστα Σερίφη] Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$\int_{(x+1)(x-3)}^{(x+2)(x-4)} \ln(xt)\, dt$$

Απαντηση: Εργαζόμενοι ανάλογα βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού είναι το $(-1, 0) \cup (4, +\infty)$.

ΑΣΕΠ Μαθηματικά 1

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

9 Ιουνίου 2008

Περίληψη

Στα επόμενα υπάρχει μία γνωστή διάταξη επιχειρημάτων για την απόδειξη του κανόνα της παραγώγου σύνθετης συνάρτηση που παρουσιάσθηκε στον δικτυακό τόπο mathematica. Στηρίζεται σε ένα απλό χαρακτηρισμό της παραγωγισιμότητας σε ένα σημείο που ονομάζεται παρατήρηση του Καραθεοδωρή (ή και παράγωγος κατά Καραθεοδωρή) που απλοποιεί το θέμα και το κάνει διδάξιμο. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στην πολύ ενδιαφέρουσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία του Απόστολου Παπαδογιαννάκη[1]:
Αποστολος Παπαδογιαννακης: *Η Ανάλυση στο λύκειο και μερικές προτάσεις για την ενοποίηση και απλοποίηση των αποδείξεων βασικών θεωρημάτων της.* ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2005
Ευχαριστώ τον Κώστα Σερίφη για τις επισημάνσεις του.

Στα επόμενα τα Δ, E είναι διαστήματα,

Α Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \Delta$.

1. Να αποδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.
   (α′) Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
   (β′) Υπάρχει α ώστε η συνάρτηση φ ορισμένη στο Δ με
   $$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & , \quad x \neq x_0 \\ \alpha & , \quad x = x_0 \end{cases}$$
2. Να αποδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.
   (α′) Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0
   (β′) Υπάρχει μοναδική συνάρτηση f^* ορισμένη στο Δ και συνεχής στο x_0 ώστε για όλα τα x από το Δ να ισχύει:
   $$f(x) - f(x_0) = f^*(x)(x - x_0)$$

Β Θεωρούμε συναρτήσεις $f : \Delta \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στα $x_0 \in \Delta$, $y_0 = f(x_0) \in E$ όπου το y_0 είναι εσωτρικό σημείο του Δ. Σύμφωνα με το (Α) και για τα x_0, x_0 υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις f^*, g^* συνεχείς στα x_0, y_0 ώστε:

$$f(x) - f(x_0) = f^*(x)(x - x_0) \text{ για όλα τα } x \text{ από το , } \Delta$$

$$g(y) - g(y_0) = g^*(y)(y - y_0) \text{ για όλα τα } y \text{ από το } E$$

[1] Βλ. http://web-server.math.uoc.gr:1080/erevna/diplomatikes/Papadogiannakis_MDE.pdf.pdf

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε x από το Δ ισχύει
$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = g^*(f(x))f^*(x)(x - x_0)$$
2. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α 1. $(\alpha') \Rightarrow (\beta')$ Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι κάποιος πραγματικός αριθμός ας τον ονομάσουμε α. Τότε γιαυτή την τιμή του α η συνάρτηση φ θα είναι συνεχής στο x_0 διότι $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha = f(x_0)$.
$(\beta') \Rightarrow (\alpha')$ Υποθέτουμε ότι για κάποια κατάλληλη τιμή του α η φ είναι συνεχής στο x_0. Τότε το όριο της στο x_0 θα υπάρχει και θα είναι ίσο με την τιμή της στο στο x_0. Αυτό σημαίνει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$ και επειδή το $f(x_0) = \alpha$ είναι πραγματικός αριθμός συμπεραίνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

2. $(\alpha') \Rightarrow (\beta')$ Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Από το προηγούμενο θα υπάρχει κατάλληλος α ώστε η συνάρτηση
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & , \quad x \neq x_0 \\ \alpha & , \quad x = x_0 \end{cases}$$
να είναι συνεχής στο x_0. Εχουμε ότι για $x \neq x_0$ είναι $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και επομένως
$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0) \qquad \text{για} \quad x \neq x_0 \tag{1}$$
Η σχέση ισχύει (1) και για $x = x_0$ διότι τότε γράφεται:
$$f(x_0) - f(x_0) = \alpha(x_0 - x_0)$$
που ισχύει. Αν ονομάσουμε $f^* = \varphi$ έχουμε ότι
$$f(x) - f(x_0) = f^*(x)(x - x_0) \qquad \text{για όλα τα} \quad x \tag{2}$$
Αν τώρα μία συνάρτηση έχει την ιδιότητα (2) τότε για κάθε $x \neq x_0$ θα είναι ίση με $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και επομένως θα συμπίπτει με την f^* στα $x \neq x_0$. Αλλά τότε θα συμπίπτει και στο x_0 αφού η τιμή της στο x_0 θα είναι το όριο στο x_0 του $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Άρα υπάρχει μία μόνο συνάρτηση f^* που ικανοποιεί την (2).
$(\beta') \Rightarrow (\alpha')$ Απλο.

Β Είναι $g(f(x))-g(f(x_0)) = g^*(f(x))(f(x) - f(x_0)) = g^*(f(x))f^*(x)(x-x_0)$. Έχουμε ότι
$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g^*(f(x))f^*(x)(x - x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} g^*(f(x))f^*(x)$$

Τώρα

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και επομένως συνεχής στο x_0
- Η f^* είναι συνεχής στο x_0
- Η g^* είναι συνεχής στο $y_0 = f(x_0)$
- Η g^* είναι συνεχής στο E και επομένως είναι συνεχής και στο $y_0 = f(x_0)$, η f είναι επομένως συνεχής στο x_0 άρα η $g^* \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 [2]

  Επομένως $\lim\limits_{x \to x_0} g^*(f(x))f^*(x) = g^*(f(x_0))f^*(x_0) = g^*(y_0)f^*(x_0) =_{\{\text{λόγω συνεχείας}\}}$
  $= \lim\limits_{y \to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0) \cdot f'(x_0)$

[2] Στο σχολικό βιβλίο διατυπώνεται αρκετά ελεύθερα η πρόταση ότι αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 (σελίδα 190). Όμως αν για παράδειγμα έχουμε τις $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g : [2, 3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, η $g \circ f$ ορίζεται μόνο στο 2 και δεν ορίζεται κοντά στο 2 και σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου (σελίδα 161) δεν έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της $g \circ f$ στο 2. Επομένως το αυτό ισχύει και για την συνέχεια της $g \circ f$ στο 2. Η υπόθεση ότι το $y_0 = f(x_0)$ είναι εσωτερικό σημείο του E υπάρχει για να αποκλείσει τέτοιες περιπτώσεις

ΑΣΕΠ Μαθηματικά 2

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

9 Ιουνίου 2008

Περίληψη

Παρακάτω υπάρχει μία σειρά ερωτήσεων που αναφέρεται στα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα που παρουσιάσθηκαν και συζητήθηκαν στον δικτυακό τόπο mathematica.
Ένα αρχικό λάθος στις εκφωνήσεις διορθώθηκε χάρις στην επισήμανση του Κώστα Σερίφη. Τον ευχαριστώ.

Στα επόμενα η σχέση $x > y$ σημαίνει ότι οι x, y **είναι** πραγματικοί αριθμοί και ότι ο x είναι μεγαλύτερος του y.

Α Να αποδείξετε ότι αν για δύο πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$\alpha + \beta > 0, \text{ και } \alpha\beta > 0 \tag{1}$$

τότε είναι $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.

Β Να αποδείξετε ότι αν για δύο μη πραγματικούς μιγαδικούς αριθμούς α, β ισχύει η (1) τότε είναι συζυγείς με θετικό πραγματικό μέρος.

Γ Να αποδείξετε ότι αν για τρεις πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta + \gamma > 0 \\ &\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha > 0 \\ &\alpha\beta\gamma > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

τότε είναι $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

Δ Υποθέτουμε ότι για τρεις μιγαδικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει η (2).
Ποιές από τις επόμενες προτάσεις είναι αληθείς ;
α) Αν οι α, β, γ είναι πραγματικοί τότε είναι θετικοί.
β) Δε μπορούν και οι τρεις από τους α, β, γ να μην είναι πραγματικοί.
γ) Δύο τουλάχιστον από τους α, β, γ έχουν ίσα μέτρα.
δ) Το άθροισμα των τετραγώνων των α, β, γ είναι πραγματικός αριθμός.

Απαντησεις

Α (Βασίλης Στεφανίδης) Αφού $\alpha\beta > 0$ οι α, β είναι ομόσημοι δηλαδή

- $\alpha > 0, \quad \beta > 0$ ή
- $\alpha < 0, \quad \beta < 0$

και αφού $\alpha+\beta>0$ θα είναι $\alpha>0, \quad \beta>0$.

Β α΄ τρόπος (Βασίλης Στεφανίδης) Αν $\alpha=x+yi$ και $\beta=\kappa+\lambda i$ αφού $\alpha+\beta>0$ θα είναι $x+\kappa>0$ και $y+\lambda=0$ οπότε $\lambda=-y$. Αφού $\alpha\beta>0$ και $\alpha\beta=(x+yi)(\kappa+\lambda i)=(x+yi)(\kappa-yi)=x\kappa+y^2+(-xy+y\kappa)i$ θα είναι

$$x\kappa+y^2>0 \text{ και } -xy+y\kappa=0$$

Από την $-xy+y\kappa=0$ έχουμε ότι $\kappa=x$ ή $y=0$. Επειδή οι α, β είναι μη πραγματικοί η περίπτωση $y=0$ άρα αναγκαστικά $\kappa=x$. Είναι τώρα $\alpha=x+yi$, $\beta=x-yi$ και επομένως οι α, β είναι συζυγείς. Ακόμη από την $x+\kappa>0$ έχουμε $2x>0$ δηλαδή $x>0$ οπότε οι α, β έχουν θετικό πραγματικό μέρος.

β΄ τρόπος (Κώστας Σερίφης) Τα α, β είναι ρίζες του τριωνύμου $f(x)=x^2-Sx+P$ όπου $S=\alpha+\beta$ και $P=\alpha\beta$ για την οποία γνωρίζουμε ότι αν έχει μη πραγματικές ρίζες θα είναι συζυγείς. Επομένως οι α, β είναι συζυγείς. Το άθροισμα των (ίσων) πραγματικών μερών τους είναι $S>0$ άρα έχουν ίσα πραγματικά μέρη.

Γ α΄ τρόπος (Κώστας Σερίφης) Με απαγωγή στο άτοπο. Αν α, β, γ δεν ήταν και οι τρεις θετικοί τότε λόγω του ότι $\alpha\beta\gamma>0$ θα πρέπει δύο από αυτούς να είναι αρνητικοί. Έστω ότι οι α, β είναι οι αρνητικοί τότε $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)<0$ δηλαδή

$$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)<0$$

άτοπο διότι $\alpha\beta>0, \quad \alpha^2+\beta^2>0, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

β΄ τρόπος (Ν.Σ. Μαυρογιάννης) Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

με ρίζες τα α, β, γ. Αν τα α, β, γ δεν είναι θετικά τότε τα δύο από αυτά ας πούμε τα α, β (όπως στο επιχείρημα του Κώστα Σερίφη βλ, προηγούμενο) θα είναι αρνητικά. Από το θεώρημα του Rolle η παράγωγος του (που υπολογίζεται εύκολα) $P'(x)=3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ θα έχει μία ρίζα μεταξύ των α, β, δηλαδή αρνητική. Άτοπο διότι το τριώνυμο $P'(x)$ έχει ρίζες θετικές (αφού το άθροισμα των ριζών του είναι $\frac{2(\alpha+\beta+\gamma)}{3}>0$ και το γινόμενο των ριζών του είναι $\frac{2(\alpha+\beta+\gamma)}{3}>0$).

Δ (Απαντήσεις του Κώστα Σερίφη, Αλέξανδρου Συγγελάκη, και kostas.zig)

α) Είναι σωστό λόγω του Γ.

β) Το πολυώνυμο

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=$$

$$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

έχει ρίζες τους α, β, γ και πραγματικούς συντελεστές επομένως επειδή είναι περιττού βαθμού [1] θα έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα άρα δε μπορεί και οι τρεις από τους α, β, γ να μην είναι πραγματικοί. Επομένως η πρόταση είναι ψευδής. Μάλιστα υπάρχουν τρεις δυνατότητες:

[1] Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει περιττο βαθμό ν θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα διότι αν ονομάσουμε α_ν τον συντελεστή του μεγιαστοβαθμίου όρου του θα είναι

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\pm\infty \quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=\mp\infty \quad (*)$$

ανάλογα με το αν το α_ν είναι θετικό ή αρνητικό. Σε κάθε περίπτωση η συνεχής συνάρτηση

- Και οι τρεις αριθμοί να είναι πραγματικοί οπότε θα είναι θετικοί
- Ένας να είναι πραγματικός και οι δύο άλλοι να είναι μη πραγματικοί μιγαδικοί, αναγκαστικά συζυγείς. Αν είναι ο α ο πραγματικός και β, γ οι μη πραγματικοί συζυγείς τότε από την σχέση $\alpha\beta\gamma > 0$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha\left(\beta\bar{\beta}\right) > 0$ και αφού εδώ είναι $\beta\bar{\beta} > 0$ θα είναι και $\alpha > 0$

γ) Είναι ψευδής: Για παράδειγμα οι $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ μπορούν να είναι τρεις διαφορετικοί θετικοί αριθμοί οπότε και θα έχουν διαφορετικές απόλυτες τιμές (=μέτρα). Ακόμη μπορούν να είναι ένας θετικός πραγματικός και δύο μη πραγματικοί συζυγείς.
δ) Είναι ψευδής: Με $\alpha = 1$, $\beta = 2 + 3i$, $\gamma = 2 - 3i$ είναι $\alpha + \beta + \gamma = 5$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 17$, $\alpha\beta\gamma = 13$, $\alpha^2 + \ \beta^2 + \ \gamma^2 = -9$.

$P(x)$ θα παίρνει θετικές αλλά και αρνητικές τιμές δηλαδή θα υπάρχουν x_1, x_2 ώστε $P(x_1) > 0$, $P(x_2) < 0$ και επομένως από το θεώρημα του Bolzano θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Σημειώστε ότι το γεγονός ότι έχουμε να κάνουμε με πολυώνυμο δεν είναι ουσιώδες. Όλο κι όλο που χρειάζεται για την εξασφάλιση ρίζας είναι να έχουμε συνεχή συνάρτηση που ικανοποιεί τις $(*)$

ΑΣΕΠ Μαθηματικά 3

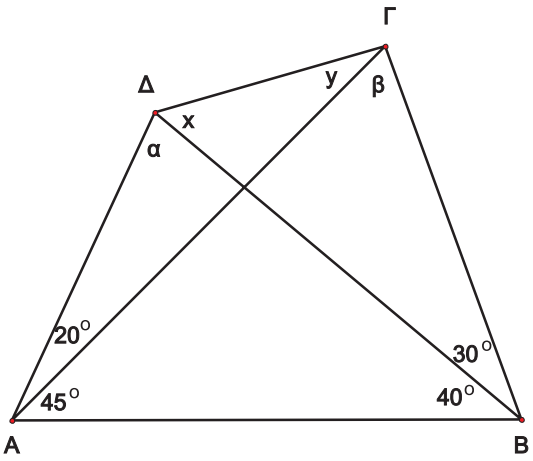
Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

9 Ιουνίου 2008

Περίληψη

Πρωτοσυνάτησα αυτό το πρόβλημα πριν 25 χρόνια στην προσπάθεια μου να ετοιμάσω κάποιες ασκήσεις για την Β΄ Γυμνασίου! Αργότερα έμαθα ότι το πρόβλημα έχει μεγάλη ηλικία είναι γνωστό ως πρόβλημα του Hansen ο οποίος ήταν Γερμανός Αστρονόμος (1795-1874) αν και το έλυσαν πολλοί πριν από αυτόν.
Λεπτομέρειες για το πρόβλημα μπορούν να βρεθούν στο:
Heinrich Dorrie: 100 Great Problems of Elementary Mathematics, DOVER 1965

Στο επόμενο σχήμα



1. Να υπολογίσετε τις γωνίες α, β.
2. Να δώσετε τρόπο κατά προσέγγισιν υπολογισμού των γωνιών x, y.

Απαντηση (Αλέξανδρος Συγγελάκης)

Καταρχήν $\alpha = 75^\circ$ και $\beta = 65^\circ$. Επίσης

$$x + y = 85^\circ \tag{1}$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο των ημιτόνων έχουμε:
Στο τρίγωνο ΒΓΔ:

$$\frac{\eta\mu\,\mathrm{x}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\eta\mu\,(\mathrm{y} + 65^\circ)}{\mathrm{B\Delta}} \tag{2}$$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$\frac{\eta\mu\ 45^\circ}{\text{ΒΓ}} = \frac{\eta\mu\ 70^\circ}{\text{ΑΓ}} \tag{3}$$

Στο τρίγωνο ΑΓΔ:

$$\frac{\eta\mu\ \ (75^\circ + \text{x})}{\text{ΑΓ}} = \frac{\eta\mu\ \text{y}}{\text{ΑΔ}} \tag{4}$$

Στο τρίγωνο ΑΒΔ:

$$\frac{\eta\mu\ \ \ 40^\circ}{\text{ΑΔ}} = \frac{\eta\mu\ 65^\circ}{\text{ΒΔ}} \tag{5}$$

Θα απαλείψουμε τώρα όλα τα εμφανιζόμενα μήκη: Διαιρώντας τις (2), (3) κατά μέλη και γράφοντας το β΄ μέλος σαν α΄ μέλος βρίσκουμε:

$$\frac{\text{ΑΓ}\,\eta\mu\ (\text{y} + 65^\circ)}{\text{ΒΔ}\ \ \eta\mu\ \ \ 70^\circ} = \frac{\eta\mu\ \text{x}}{\eta\mu\ \ 45^\circ} \tag{6}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (4), (6) και αλλάζοντας την σειρά των μελών της ισότητας βρίσκουμε:

$$\frac{\eta\mu\ \text{x}\ \eta\mu\ \text{y}}{\text{ΑΔ}\ \eta\mu\ \ 45^\circ} = \frac{\eta\mu\ (\text{y} + 65^\circ)\,\eta\mu\ (\text{x} + 75^\circ)}{\text{ΒΔ}\ \ \eta\mu\ \ \ 70^\circ} \tag{7}$$

Τέλος διαιρώντας κατά μέλη τις (5), (7) τελικα βρίσκουμε:

$$\eta\mu\,\text{x}\ \eta\mu\,\text{y}\,\eta\mu\,70^\circ\eta\mu\,65^\circ = \eta\mu\,45^\circ\eta\mu 40^\circ\,\eta\mu\ (75^\circ + \text{x})\,\eta\mu\,(\text{y} + 65^\circ) \tag{8}$$

Αντικαθιστούμε $x = 85^\circ - y$ και καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\eta\mu\ (85^\circ - \text{y})\ \ \eta\mu\,\text{y}\,\eta\mu\,70^\circ\eta\mu\,65^\circ = \eta\mu\,45^\circ\eta\mu 40^\circ\,\eta\mu\ (160^\circ - \text{y})\,\eta\mu\,(\text{y} + 65^\circ) \tag{9}$$

Αλλά, όπως εύκολα διαπιστώνεται, ισχύει:

$$\boxed{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta = \tfrac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu\,(\alpha + \beta)\right)}$$

Έτσι η τελευταία εξίσωση γράφεται:

$$\eta\mu 70^\circ\eta\mu 65^\circ\,(\sigma\upsilon\nu\,(85^\circ - 2\text{y}) - \sigma\upsilon\nu 85^\circ) = \eta\mu 45^\circ\eta\mu 40^\circ\,(\sigma\upsilon\nu\,(95^\circ + 2\text{y}) - \sigma\upsilon\nu 225^\circ\,) \tag{10}$$

Η παραπάνω εξίσωση, μετά τις πράξεις, ανάγεται σε εξίσωση της μορφής:

$$p\eta\mu 2y + q\sigma\upsilon\nu 2y = r$$

που είναι γνωστής μορφής. Οι κατά προσεγγισιν τιμές των y, x, που βρίσκονται από τους πίνακες ή με αριθμομηχανή είναι $29^\circ, 56^\circ$.

ΑΣΕΠ Μαθηματικά 4

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

10 Ιουνίου 2008

Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών ν, μ ορίζουμε:

$$J(\nu,\mu)=\int_0^1 x^\nu (1-x)^\mu \, dx \tag{1}$$

Α Να αποδείξετε ότι

$$J(\nu,\mu)=\frac{\mu}{\nu+1}J(\nu+1,\mu-1) \tag{2}$$

Β Να αποδείξετε ότι

$$J(\nu,\mu)=\frac{\nu!\mu!}{(\nu+\mu)!}J(\nu+\mu,0) \tag{3}$$

Γ Από $\nu+\mu$ αντικείμενα επιλέγουμε χωρίς επανατοποθέτηση ν. Να αποδείξετε ότι η επιλογή μπορεί να γίνει κατά $\frac{J(\nu+\mu,0)}{J(\nu,\mu)}$ τρόπους.

Δ Να υπολογίσετε το $J(\nu,\mu)$

Απαντηση (Σπύρος Καρδαμίτσης)

Α Επειδή $\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)'=x^\nu$ εφαρμόζοντας τον τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης προκύπτει

$$J(\nu,\mu)=\int_0^1 x^\nu(1-x)^\mu\,dx=\int_0^1\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)'(1-x)^\mu\,dx=$$

$$\left[\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)(1-x)^\mu\right]_0^1-\int_0^1\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)((1-x)^\mu)'\,dx=$$

$$0-\int_0^1\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)\left(-\mu(1-x)^{\mu-1}\right)dx=\frac{\mu}{\nu+1}\int_0^1 x^{\nu+1}(1-x)^{\mu-1}\,dx=$$

$$\frac{\mu}{\nu+1}J(\nu+1,\mu-1)$$

Β Εφαρμόζοντας συνολικά μ φορές την σχέση της παραγοντικής ολοκλήρωσης στο αρχικό ολοκλήρωμα ή αλλιώς εφαρμόζοντας την (2) μ φορές βρίσκουμε:

$$J(\nu,\mu)=\frac{\mu}{\nu+1}J(\nu+1,\mu-1)$$

$$J(\nu+1,\mu-1)=\frac{\mu-1}{\nu+2}J(\nu+2,\mu-2)$$
$$J(\nu+2,\mu-2)=\frac{\mu-2}{\nu+3}J(\nu+3,\mu-3)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$J(\nu+k,\mu-k)=\frac{\mu-k}{\nu+k+1}J(\nu+k+1,\mu-(k-1))$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$J(\nu+\mu-1,1)=\frac{1}{\nu+\mu}J(\nu+\mu,1)$$

Αντικαθιστώντας[1] την 2η σχέση στην πρώτη και μετά την 3η στην σχέση που προέκυψε κ.ο.κ. βρίσκουμε την (3)

Γ Το πλήθος με το οποίο μπορούν να επιλεγούν, χωρίς επανατοποθέτηση, ν αντικείμενα από $\nu+\mu$ είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών των $\nu+\mu$ αντικειμένων ανά ν που είναι ίσο με

$$\binom{\nu+\mu}{\nu}=\frac{(\nu+\mu)!}{\nu!\,(\nu+\mu-\nu)!}=\frac{(\nu+\mu)!}{\nu!\mu!}=\frac{J(\nu+\mu,0)}{J(\nu,\mu)}$$

Δ Είναι:

$$J(\nu,\mu)=\frac{\nu!\mu!}{(\nu+\mu)!}J(\nu+\mu,0)=\frac{\nu!\mu!}{(\nu+\mu)!}\int_0^1 x^{\nu+\mu}dx=$$
$$\frac{\nu!\mu!}{(\nu+\mu)!}\frac{1}{\nu+\mu+1}=\frac{\nu!\mu!}{(\nu+\mu+1)!}$$

[1] μπορούμε και να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη και να διαγράψουμε όσους παράγοντες υπάρχουν και στα δύο μέλη δηλαδή τα ολοκληρώματα $J(\nu+1,\mu-1)$, $J(\nu+2,\mu-2)$, $J(\nu+3,\mu-3)$, ..., $J(\nu+\mu-1,1)$. Η διαγραφή μπορεί να γίνει άφοβα διότι οι ολοκληρωτέοι σε αυτά τα ολοκληρώματα είναι συναρτήσεις που είναι μη αρνητικές στο διάστημα $[0,1]$ και γίνονται μηδέν μόνο στα 0 και 1 επομένως τα ολοκληρώματα αυτά είναι θετικά

ΑΣΕΠ Μαθηματικά 17

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

28 Ιουνίου 2008

Στο θέμα αυτό γράφοντας $f^{(k)}$ θα εννοουμε την k τάξης παράγωγο της συνάρτησης f. Ειδικά το $f^{(0)}$ δηλώνει την f.

Έστω f ένα πολυώνυμο. Ένας αριθμός ρ θα ονομάζεται ρίζα του f πολλαπλότητας k αν το πολυώνυμο $(x-\rho)^k$ είναι παράγοντας του f ενώ το πολυώνυμο $(x-\rho)^{k+1}$ δεν είναι παράγοντας του.

Α Να αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου f πολλαπλότητας 2 αν και μόνο αν

$$f(\rho) = f'(\rho) = 0 \neq f''(\rho) \tag{1}$$

Β Να αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου f πολλαπλότητας k αν και μόνο αν

$$f^{(0)}(\rho) = f^{(1)}(\rho) = ... = f^{(k-1)}(\rho) = 0 \neq f^{(k)}(\rho) \tag{2}$$

Γ Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης του πολυωνύμου f στο σημείο με τετμημένη x_0 αν και μόνο αν ο αριθμός x_0 είναι ρίζα του πολυωνύμου $g(x) = f(x) - (\alpha x + \beta)$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον 2.

Δ Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ έτσι ώστε ο αριθμός 1 να είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + 7x - 3$$

με πολλαπλότητα 3.

Απαντησεις (Σπύρος Καρδαμίτσης)

Α Διαιρούμε το πολυώνυμο f με το πολυώνυμο $(x-\rho)^2$ και έχουμε

$$f(x) = \pi(x)(x-\rho)^2 + \upsilon(x) \quad \text{όπου} \quad \upsilon(x) = \alpha x + \beta \tag{3}$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές την (3) βρίσκουμε:

$$f'(x) = \pi'(x)(x-\rho)^2 + 2\pi(x)(x-\rho) + \alpha$$

$$f^{'}(x) = \pi''(x)(x-\rho)^2 + 4\pi'(x)(x-\rho) + 2\pi(x)$$

Έχουμε τώρα:

$$(1) \Leftrightarrow$$

$$\alpha\rho+\beta=0 \text{ και } \alpha=0 \text{ και } \pi(\rho)\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$f(x)=\pi(x)(x-\rho)^2 \text{ και } \pi(\rho)\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\text{ο αριθμός } \rho \text{ είναι ρίζα πολλαπλότητας } 2$$

Β Διαιρούμε το $f(x)$ δια του $(x-\rho)^k$ και βρίσκουμε ότι:

$$f(x)=(x-\rho)^k\pi(x)+\upsilon(x) \tag{4}$$

οπου το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ στην (4) είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ $k-1$. Παραγωγίζοντας την (4) βρίσκουμε

$$f'(x)=k(x-\rho)^{k-1}\pi(x)+(x-\rho)^k\pi'(x)+\upsilon'(x)=$$
$$(x-\rho)^{k-1}\underbrace{(k\pi(x)+(x-\rho)\pi'(x))}_{\pi_1(x)}+\upsilon'(x)=(x-\rho)^{k-1}\pi_1(x)+\upsilon'(x)$$

Έτσι ξεκινώντας από την (4), παραγωγίζοντας και κάθε φορά βγάζοντας κοινό παράγοντα την κατάλληλη δύναμη του $(x-\rho)$ θα έχουμε:

$$f^{(0)}(x)=(x-\rho)^k\pi(x)+\upsilon(x)$$
$$f^{(1)}(x)=(x-\rho)^{k-1}\pi_1(x)+\upsilon^{(1)}(x)$$
$$f^{(2)}(x)=(x-\rho)^{k-2}\pi_2(x)+\upsilon^{(2)}(x)$$
$$\ldots$$
$$f^{(k-1)}(x)=(x-\rho)\pi_{k-1}(x)+\upsilon^{(k-1)}(x)$$
$$f^{(k)}(x)=\pi_k(x)$$

Η τελευταία σχέση δικαιολογείται από το γεγονός ότι η k τάξης παράγωγος του πολυωνύμου $\upsilon(x)$, που έχει βαθμό το πολύ $k-1$, θα είναι 0. Έχουμε τώρα ότι:

$$(2)\Leftrightarrow$$
$$\upsilon(\rho)=\upsilon^{(1)}(\rho)=\upsilon^{(2)}(\rho)=\ldots=\upsilon^{(k-1)}(\rho)=0\neq\pi_k(\rho)\Leftrightarrow$$
$$\text{όλοι οι συντελεστές του } \upsilon(x) \text{ είναι μηδέν και } \pi_k(\rho)\neq 0\Leftrightarrow$$
$$\text{ο } (x-\rho)^k \text{ είναι παράγοντας του } f \text{ και } \pi_k(\rho)\neq 0\Leftrightarrow$$
$$\text{ο } (x-\rho)^k \text{ είναι παράγοντας του } f \text{ και } \pi(\rho)\neq 0\Leftrightarrow$$

ο $(x-\rho)^k$ είναι παράγοντας του f και ο $(x-\rho)^{k+1}$ δεν είναι παράγοντας του f

Η τελευταία ισοδυναμία προκύπτει από τον τρόπο σχηματισμού των $\pi_i(x)$: Είναι κάποιο $\pi_i(\rho)$ διάφορο του μηδενός αν και μόνο αν το $\pi_{i+1}(\rho)$ είναι διάφορο του μηδενός. Επομένως η (2) ισοδυναμεί με το ότι ο ρ είναι ρίζα του f με πολλαπλότητα k.[1]

[1] Η παρούσα λύση του Σπύρου Καρδαμίτση κινείται ακριβώς εντός της (τρέχουσας) ύλης του ΑΣΕΠ που δεν αναφέρει την μαθηματική επαγωγή ως εξεταστέα ύλη. Αν χρησιμοποιήσουμε επαγωγή μπορούμε να έχουμε και μία άλλη απόδειξη που αδρομερώς είναι η ακόλουθη:
Εργαζομαστε με επαγωγή στο βαθμό ν του f. Για $\nu=1$ το αποδεικτέο προφανώς ισχύει. Το βήμα από ν σε $\nu+1$ γίνεται με την παρατήρηση ότι αν ένα πολυώνυμο *έχει ρίζα ένα αριθμό* τότε θα τον έχει ρίζα με πολλαπλότητα k αν και μόνο αν η παράγωγος του τον έχει ρίζα με πολλαπλότητα $k-1$.

Γ Η $y = \alpha x + \beta$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης του πολυωνύμου f στο σημείο με τετμημένη x_0 αν και μόνο αν

$$f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \text{ και } f'(x_0) = \alpha$$

δηλαδή αν και μόνο αν

$$g(x_0) = 0 \text{ και } g'(x_0) = 0$$

που ισοδυναμεί με το ότι ο x_0 είναι ρίζα του f με πολλαπλότητα τουλάχιστον 2.

Δ Για να είναι ο 1 είναι ρίζα πολλαπλότητας 3 πρέπει (από προηγούμενο ερώτημα) $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ και $f^{(3)}(1) \neq 0$. Αλλά:

$$f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + 7x - 3$$

$$f'(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + 7$$

$$f''(x) = 12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma$$

$$f^{(3)}(x) = 24\alpha x + 6\beta$$

Έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{c} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha + \beta + \gamma = -4 \\ 4\alpha + 3\beta + 2\gamma = -7 \\ 12\alpha + 6\beta + 2\gamma = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \\ \gamma = -3 \end{array} \right\}$$

Για αυτές τις τιμές ισχύει και $f^{(3)}(1) = 30 \neq 0$ επομένως είναι οι ζητούμενες.

ΑΣΕΠ Μαθηματικά 19

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

6 Ιουλίου 2008

Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ. Ευθεία παράλληλη προς τις βάσεις του τέμνει

- τις πλευρές ΑΔ, ΒΓ στα σημεία Ε, Ζ αντιστοίχως και
- τις διαγώνιους ΑΓ και ΒΔ στα Η, Θ αντιστοίχως

Δίνεται ότι

$$\text{AB} = p, \qquad \Gamma\Delta = q, \qquad \frac{\text{AE}}{\text{E}\Delta} = \frac{m}{n}$$

Α Να υπολογισθούν συναρτήσει των p, q, m, n τα τμήματα ΕΖ, ΗΘ.

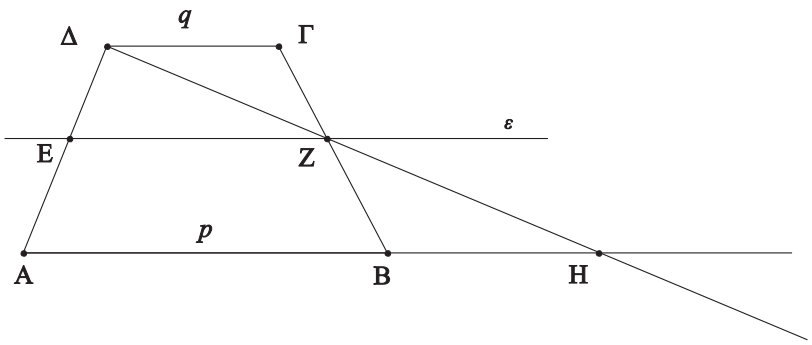
Β Στην ειδική περίπτωση όπου η ευθεία ΕΖ διέρχεται από το κοινό σημείο των διαγωνίων να υπολογισθεί το ΕΖ συναρτήσει των p, q.

Γ Να υπολογισθεί ο λόγος $\frac{(\text{ABZE})}{(\text{EZ}\Gamma\Delta)}$ των εμβαδών των τραπεζίων ΑΒΖΕ, ΕΖΓΔ συναρτήσει των p, q, m, n.

Δ Πως πρέπει να επιλεγεί η ΕΖ ώστε να χωρίζει το τραπέζιο ΑΒΓΔ σε δύο ισοδύναμα τραπέζια·

Απαντησεις (Σπύρος Καρδαμίτσης)

Α1 Η ΔΖ προεκτεινόμενη τέμνει την ΑΒ στο Η.



Από την υπόθεση και τις ιδιότητες των αναλογιών έχουμε: Επομένως:

$$\frac{\text{AE}}{\text{E}\Delta}=\frac{m}{n}\Rightarrow\frac{\text{AE}+\text{E}\Delta}{\text{E}\Delta}=\frac{m+n}{n}\Rightarrow\frac{\text{A}\Delta}{\text{E}\Delta}=\frac{m+n}{n}\Rightarrow\frac{\Delta\text{E}}{\text{A}\Delta}=\frac{n}{m+n} \tag{1}$$

Στο τρίγωνο ΑΔΗ έχουμε:

$$\frac{\Delta\text{E}}{\text{A}\Delta}=\frac{\Delta\text{Z}}{\Delta\text{H}}=\frac{\text{EZ}}{\text{AH}} \tag{2}$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΔΓΖ και ΖΒΗ έχουμε:

$$\frac{\text{BH}}{\Gamma\Delta}=\frac{m}{n}\Rightarrow\frac{\text{BH}}{q}=\frac{m}{n}\Rightarrow\text{BH}=\frac{m\cdot q}{n} \tag{3}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

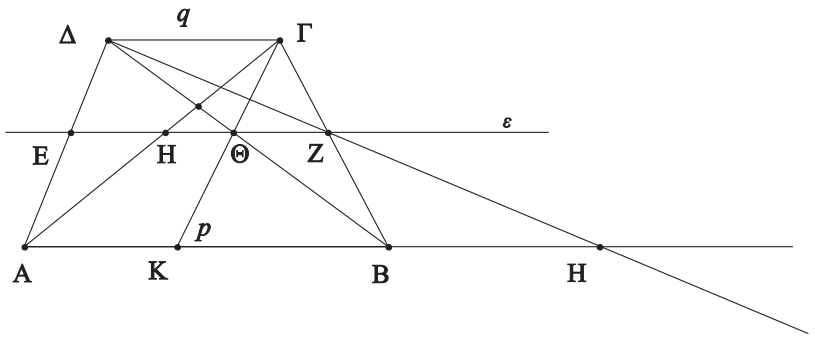
$$\frac{\text{EZ}}{\text{AH}}=\frac{n}{m+n}\Rightarrow\frac{\text{EZ}}{\text{A}B+BH}=\frac{n}{m+n}\overset{((3))}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\text{EZ}}{p+\frac{m\cdot q}{n}}=\frac{n}{m+n}\Rightarrow\text{EZ}=\frac{np+mq}{n}\cdot\frac{n}{m+n}$$

Επομένως:

$$\boxed{\text{EZ}=\tfrac{np+mq}{m+n}}$$

Α2 Η ΓΘ προεκτεινόμενη τέμνει την ΑΒ στο Κ.



Όπως είδαμε και στο προηγούμενο ερώτημα είναι

$$\frac{\Gamma\text{H}}{\Gamma\text{A}}=\frac{\Delta\text{E}}{\text{A}\Delta}=\frac{n}{m+n} \tag{4}$$

Στο τρίγωνο ΑΓΚ έχουμε:

$$\frac{\Gamma\text{H}}{\Gamma\text{A}}=\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\text{K}}=\frac{\text{H}\Theta}{\text{AK}} \tag{5}$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΔΓΘ, ΘΚΒ έχουμε:

$$\frac{\text{KB}}{\Gamma\Delta}=\frac{m}{n}\Rightarrow\frac{\text{KB}}{q}=\frac{m}{n}\Rightarrow\text{KB}=\frac{m\cdot q}{n} \tag{6}$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε:

$$\frac{\text{HΘ}}{\text{AK}}=\frac{n}{m+n}\Rightarrow\frac{\text{HΘ}}{\text{A}B-\text{KB}}=\frac{n}{m+n}\overset{(6)}{\Rightarrow}\frac{\text{HΘ}}{p-\frac{m\cdot q}{n}}=\frac{n}{m+n}\Rightarrow\text{HΘ}=\frac{np-mq}{n}\cdot\frac{n}{m+n}$$

Άρα[1]

$$\boxed{\text{HΘ}=\tfrac{np-mq}{m+n}}$$

ΣΧΟΛΙΟ Αν στις προηγούμενες σχέσεις αν θέσουμε $m=n$ προκύπτουν τα γνωστά θεωρήματα που ισχύουν για τα τραπέζια.

Β Αν η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων τότε τα σημεία Η και Θ ταυτίζονται επομένως $\text{HΘ}=0$ άρα $\frac{np-mq}{m+n}=0$ επομένως

$$np=mq \tag{7}$$

Από την σχέση (7) έχουμε $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}\Rightarrow\frac{m+n}{n}=\frac{p+q}{q}$ άρα:

$$\text{EZ}=\frac{np+mq}{m+n}=\frac{np+np}{m+n}=\frac{2np}{m+n}=\frac{2p}{\frac{m+n}{n}}=\frac{2p}{\frac{p+q}{q}}=\frac{2pq}{p+q}$$

Τελικά

$$\boxed{\text{EZ}=\tfrac{2pq}{p+q}}$$

Γ Αν $\upsilon_1,\ \upsilon_2$ είναι τα ύψη των τραπεζίων ABZE και EZΓΔ αντίστοιχα, τότε $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{m}{n}$, οπότε ο λόγος των εμβαδών είναι:

$$\frac{(\text{ABZE})}{(\text{EZ}\Gamma\Delta)}=\frac{\frac{p+\text{EZ}}{2}\cdot\upsilon_1}{\frac{q+\text{EZ}}{2}\cdot\upsilon_2}=\frac{p+\text{EZ}}{q+EZ}\cdot\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{p+\frac{np+mq}{m+n}}{q+\frac{np+mq}{m+n}}\cdot\frac{m}{n}=\ldots=\frac{(m+2n)p+mq}{np+(2m+n)q}\cdot\frac{m}{n}$$

Δ Για την ισοδυναμία των τραπεζίων που σχηματίζονται έχουμε:

$$(\text{ABZE})=(\text{EZ}\Gamma\Delta)\Leftrightarrow$$

$$\frac{(m+2n)p+mq}{np+(2m+n)q}\cdot\frac{m}{n}=1\Leftrightarrow$$

$$[(m+2n)p+mq]\cdot m=[np+(2m+n)q]\cdot n\Leftrightarrow$$

$$m^2p+2mnp+m^2q=n^2p+2mnq+n^2q\Leftrightarrow$$

διαιρώντας με m^2 $(m\neq 0)$ έχουμε:

$$p+2\cdot\frac{n}{m}p-\left(\frac{n}{m}\right)^2p+q-2\cdot\frac{n}{m}q-\left(\frac{n}{m}\right)^2q=0$$

και θέτοντας $\frac{n}{m}=t$ η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται ισοδύναμα σε:

$$(p+q)t^2-2(p-q)t-(p+q)=0 \tag{8}$$

[1] Η joulia1961 σημείωσε ότι το συμπέρασμα μπορεί να προκύψει και ως εξής: HΘ=EZ-EH-ΘZ,το EZ γνωστο απο το [A1] και τα EH,ΘZ τα βρισκουμε απο τις ομοιοτητες των AEH, AΔΓ και BΘZ, BΓΔ αντιστοιχα

που έχει ως ρίζες

$$t_{1,2} = \frac{p - q \pm \sqrt{2(p^2 + q^2)}}{p + q}$$

Επειδή η (8) έχει γινόμενο ριζών ίσο με -1 οι ρίζες είναι ετερόσημες και δεκτή είναι μόνο η θετική που είναι η μεγαλύτερη από τις δύο ρίζες. Άρα πρέπει

$$\frac{n}{m} = \frac{p - q + \sqrt{2(p^2 + q^2)}}{p + q}$$

ΑΣΕΠ Μαθηματικά 22

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

16 Ιουλίου 2008

Α Να δώσετε τον ορισμό της αριθμητικής και της γεωμετρικής προόδου.

Β Να αποδείξετε ότι αν μία ακολουθία (α_ν) θετικών όρων είναι γεωμετρική πρόοδος τότε η ακολουθία $(\ln \alpha_\nu)$ των φυσικών λογαρίθμων των όρων της είναι αριθμητική πρόοδος.

Γ Έστω (α_ν) μία γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\alpha > 0$ και λόγο $\lambda > 0$. Να εκφράσετε συναρτήσει των α, λ, ν το γινόμενο $\alpha_1 \cdot \alpha_3 \cdot ... \cdot \alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων της.

Δ Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^\nu$$

Να αποδείξετε ότι για x διάφορο του 1 ισχύει:

$$f'(x) = \frac{x^{\nu+1}\nu - x^\nu \nu - x^\nu + 1}{(x-1)^2}$$

Ε Θεωρούμε:

- μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) με πρώτο όρο α και διαφορά ω και
- μία γεωμετρική πρόοδο (β_ν) με πρώτο όρο β και λόγο λ.

Να εκφράσετε συναρτήσει των $\alpha, \beta, \omega, \lambda, \nu$ το άθροισμα:

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + ... + \alpha_\nu\beta_\nu$$

Απαντησεις
(Αργύρης Γαμβρέλλης και Σπύρος Καρδαμίτσης)

Α Μια ακολουθία α_ν ονομάζεται αριθμητική πρόοδος όταν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει σταθερός αριθμός ω ώστε για όλα τα ν να ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$$

Μια ακολουθία β_ν ονομάζεται γεωμετρική πρόοδος όταν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε

μη μηδενικό αριθμό δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει σταθερός αριθμός $\lambda \neq 0$ ώστε για όλα τα ν να ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \lambda$$

(Στην γεωμετρική πρόοδο υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει $\alpha_\nu \neq 0$ για κάθε ν)

Β Η α_ν είναι γεωμετρική πρόοδος με θετικούς όρους , άρα υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε: $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \lambda$, για κάθε για κάθε ν. Αν $\beta_\nu = \ln \alpha_\nu$, για κάθε ν έχουμε: $\beta_{\nu+1} - \beta_\nu = \ln \alpha_{\nu+1} - \ln \alpha_\nu = \ln \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \ln \lambda$. Επομένως η ακολουθία β_ν είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = \ln \lambda$.

Γ Ισχύει

$$\Pi = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_\nu = (\alpha)(\alpha\lambda)\left(\alpha\lambda^2\right)...\left(\alpha\lambda^{\nu-1}\right) = \alpha^\nu \lambda^{0+1+2+...+(\nu-1)} = \alpha^\nu \lambda^{\frac{(\nu-1)\nu}{2}}$$

αφού το άθροισμα $1 + 2 + ... + (\nu - 1)$ είναι άθροισμα των $\nu - 1$ όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο 1 και τελευταίο $\nu - 1$.[1]

Δ Το άθροισμα $1 + x + x^2 + ... + x^\nu$ είναι το άθροισμα των $\nu + 1$ πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο x άρα για $x \neq 1$ είναι ίσο με $\frac{x^{\nu+1}-1}{x-1}$. Επομένως για $x \neq 1$ είναι $f(x) = \frac{x^{\nu+1}-1}{x-1}$ και παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$f'(x) = \frac{x^{\nu+1}\nu - x^\nu \nu - x^\nu + 1}{(x-1)^2}$$

Ε Έστω

$$S = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + ... + \alpha_\nu\beta_\nu \tag{1}$$

Περίπτωση 1, $\lambda = 1$ Τότε:

$$S = \beta_1(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu) = \beta_1 \frac{(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega)\nu}{2} = \frac{(2\alpha + (\nu-1)\omega)\beta\nu}{2}$$

Περίπτωση 2, $\lambda \neq 1$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) επί λ βρίσκουμε

$$\lambda S = \alpha_1(\lambda\beta_1) + \alpha_2(\lambda\beta_2) + ... + \alpha_\nu(\lambda\beta_\nu)$$

δηλαδή:

$$\lambda S = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + ... + \alpha_\nu\beta_{\nu+1} \tag{2}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και βρίσκουμε:

$$(1-\lambda)S = \alpha_1\beta_1 + \beta_2(\alpha_2 - \alpha_1) + ... + \beta_\nu(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}) - \alpha_\nu\beta_{\nu+1} \Rightarrow$$

[1] Αλλιώς: Έχουμε

$$\ln\Pi = \ln(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_\nu) = \ln\alpha_1 + \ln\alpha_2 + ... + \ln\alpha_\nu = \frac{(\ln\alpha_1 + \ln\alpha_\nu)\nu}{2} = \frac{\nu\ln(\alpha_1\alpha_\nu)}{2} = \frac{\nu\ln\left(\alpha^2\lambda^{\nu-1}\right)}{2}$$

Επομένως: $\Pi = e^{\ln\Pi} = e^{\frac{\nu\ln\left(\alpha^2\lambda^{\nu-1}\right)}{2}} = \left(e^{\ln\left(\alpha^2\lambda^{\nu-1}\right)}\right)^{\frac{\nu}{2}} = \left(\alpha^2\lambda^{\nu-1}\right)^{\frac{1}{2}\nu} = \alpha^\nu\lambda^{\frac{1}{2}(\nu-1)\nu}$

$$(1-\lambda)\,S=\alpha_1\beta_1+\omega\,(\beta_2+...+\beta_\nu)-\alpha_\nu\beta_{\nu+1}\Rightarrow$$
$$(1-\lambda)\,S=\alpha_1\beta_1-\omega\beta_1+\omega\,(\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu)-\alpha_\nu\beta_{\nu+1}\Rightarrow$$
$$(1-\lambda)\,S=\alpha\beta-\omega\beta+\omega\left(\frac{\beta\,(\lambda^\nu-1)}{\lambda-1}\right)-(\alpha+(\nu-1)\,\omega)\,\beta\lambda^\nu\Rightarrow$$

Άρα

$$S=\beta\frac{(\alpha-\omega+\nu\omega)\,\lambda^{\nu+1}-(\alpha+\nu\omega)\,\lambda^\nu+(\omega-\alpha)\,\lambda+\alpha}{(\lambda-1)^2}$$

που είναι και η ζητούμενη σχέση.[2]

[2]Ένας άλλος τρόπος για να υπολογίσουμε το άθροισμα είναι ο ακόλουθος: Από το προηγούμενο ερώτημα είναι:

$$1+2x+3x^2+...+\nu x^{\nu-1}=\frac{x^{\nu+1}\nu-x^\nu\nu-x^\nu+1}{(x-1)^2}(*)$$

Άρα

$$S=\alpha_1\beta_1+...+\alpha_\nu\beta_\nu=(\alpha\beta)+(\alpha+\omega)\,(\beta\lambda)+...+(\alpha+(\nu-1)\,\omega)\left(\beta\lambda^{\nu-1}\right)=$$
$$\alpha\beta+(\alpha\beta\lambda+\beta\lambda\omega)+...+\left(\alpha\beta\lambda^{\nu-1}+\beta\omega\,(\nu-1)\,\lambda^{\nu-1}\right)=$$
$$\alpha\beta+\left(\alpha\beta\lambda+...+\alpha\beta\lambda^{\nu-1}\right)+\left(\beta\omega\lambda+...+\beta\omega\,(\nu-1)\,\lambda^{\nu-1}\right)=$$
$$\alpha\beta+\alpha\beta\lambda\left(1+...+\lambda^{\nu-2}\right)+\beta\omega\lambda\left(1+2\lambda+...+(\nu-1)\,\lambda^{\nu-2}\right)=_{(*)}$$
$$=\alpha\beta+\alpha\beta\lambda\frac{\lambda^{\nu-1}-1}{\lambda-1}+\beta\omega\lambda\frac{\lambda^\nu\,(\nu-1)-\lambda^{\nu-1}\,(\nu-1)-\lambda^{\nu-1}+1}{(\lambda-1)^2}$$

ΑΣΕΠ Μαθηματικά 23

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

22 Αυγούστου 2008

Α Πότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου ονομάζεται γραμμικός μετασχηματισμός;

Β Θεωρούμε την ευθεία

$$y = \sqrt{3}x \qquad (\varepsilon)$$

και τον γεωμετρικό μετασχηματισμό T του επιπέδου που σε κάθε σημείο αντιστοιχεί το συμμετρικό του ως προς την (ε). Να αποδείξετε ότι ο T είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Γ Να βρείτε την εικόνα μέσω του T.

α Του σημείου $P\left(\sqrt{3}, 1\right)$

β Της ευθείας $x + y = 1$

γ Της παραβολής $y^2 = 4x$

Απαντησεις

Α Ένας μετασχηματισμός T του επιπέδου ονομάζεται γραμμικός αν απεικονίζει τα σημεία $M(x, y)$ στα $M'(x', y')$ των οποίων οι συντεταγμένες δίνονται από ένα σύστημα της μορφής [1]

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \mu \\ y' = \gamma x + \delta y + \nu \end{cases}$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu$ (σταθεροί) πραγματικοί αριθμοί.

Β Θεωρούμε τυχόν σημείο $M(x, y)$. Ένα σημείο $M'(x', y')$ θα είναι συμμετρικό του $M(x, y)$ ως προς την ευθεία ε αν και μόνο αν:

- Το διάνυσμα $\overrightarrow{MM'}$ είναι κάθετο στην ευθεία (ε).
- Το μέσο του τμήματος MM' ανήκει στην ευθεία (ε).

[1] Ισοδύναμα δίνονται από μία εξίσωση της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix}$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu$ (σταθεροί) πραγματικοί αριθμοί

Η εξίσωση της (ε) γράφεται και $\sqrt{3}x - y = 0$ και ένα παράλληλο προς αυτήν διάνυσμα είναι το $\vec{u} = \left(1, \sqrt{3}\right)$. Θα είναι λοιπόν $\overrightarrow{MM'} \perp (\varepsilon)$ αν και μόνο αν $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$ δηλαδή αν το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u}$ είναι μηδέν. Επειδή $\overrightarrow{MM'} = (x\prime - x, y\prime - y)$ πρέπει:

$$(x\prime - x) \cdot 1 + (y\prime - y) \cdot \sqrt{3} = 0$$

$$x\prime + \sqrt{3}y\prime = x + \sqrt{3}y \tag{1}$$

Το μέσον του τμήματος MM' είναι το σημείο $N\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ και για να ανήκει στην (ε) πρέπει $\sqrt{3}\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{y+y'}{2} = 0$ που ισοδυναμεί με την

$$3x' - \sqrt{3}y' = -3x + \sqrt{3}y \tag{2}$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) ως προς x', y' βρίσκουμε:

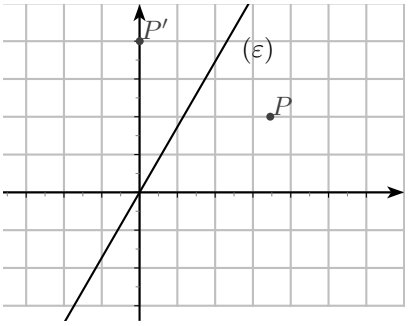
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y \\ y' = \frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y \end{cases} \tag{3}$$

ή αλλιώς

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{4}$$

Από την εξίσωση (3) (αλλά εξ' ίσου καλά και από την (4)) φαίνεται ότι ο T είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

α Για να βρούμε το συμμετρικό του $P\left(\sqrt{3}, 1\right)$ ως προς την ευθεία αρκεί να αντικαταστήσουμε τις συντεταγμένες του $x = \sqrt{3}$, $y = 1$ στην (3) ή στην (4). Θα βρούμε $x' = 0$ και $y' = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ και επομένως το συμμετρικό του P είναι το σημείο $P'\left(0, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$.



β Για να βρούμε το συμμετρικό της ευθείας $x + y = 1$ ως προς (ε) (που αναμένεται να είναι ευθεία) πρέπει να βρούμε ποια σχέση ικανοποιούν τα x', y' της (3) ή της (4) όταν τα x, y ικανοποιούν την εξίσωση $x+y = 1$. Για να το πετύχουμε αυτό αρκεί να εκφράσουμε τα x, y συναρτήσει των x', y' και να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση $x+y = 1$. Θα έχουμε έτσι μία σχέση που περιέχει μόνο x', y'. Η έκφραση των x, y συναρτήσει των x', y' μπορεί να γίνει είτε λύνοντας την (3) ως προς x, y είτε λύνοντας την (4) ως προς τον πίνακα-στήλη

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με τον αντίστροφο του πίνακα

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Έχουμε έτσι:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

και επειδή

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

έχουμε

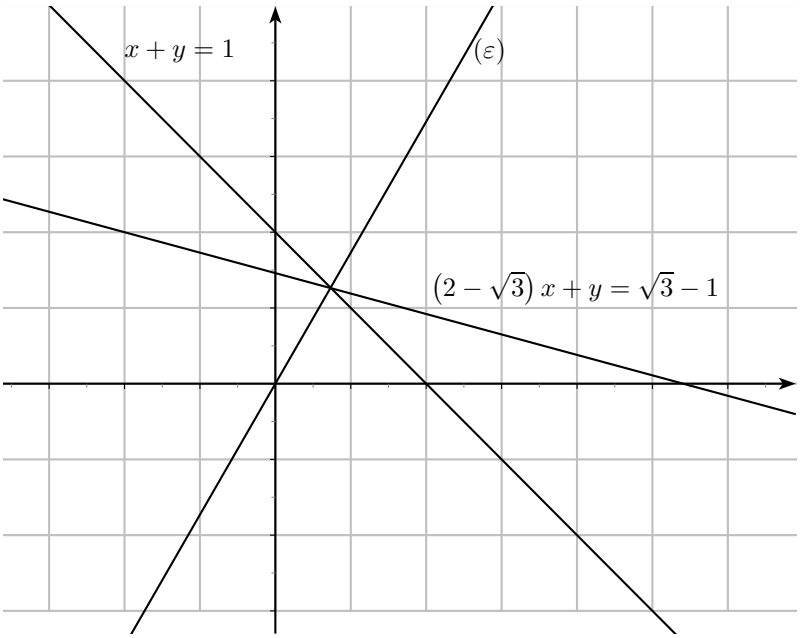
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Επομένως $x = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\sqrt{3}y'$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x' + \frac{1}{2}y'$. Άρα

$$\left(-\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\sqrt{3}y'\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x' + \frac{1}{2}y'\right) = 1$$

δηλαδή η συμμετρική ευθεία έχει εξίσωση:

$$\left(2 - \sqrt{3}\right)x + y = \sqrt{3} - 1$$



γ Εργαζόμαστε παρόμοια και αντικαθιστώντας τα $x = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\sqrt{3}y'$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x' + \frac{1}{2}y'$ στην εξίσωση $y^2 = 4x$ και έχουμε ότι

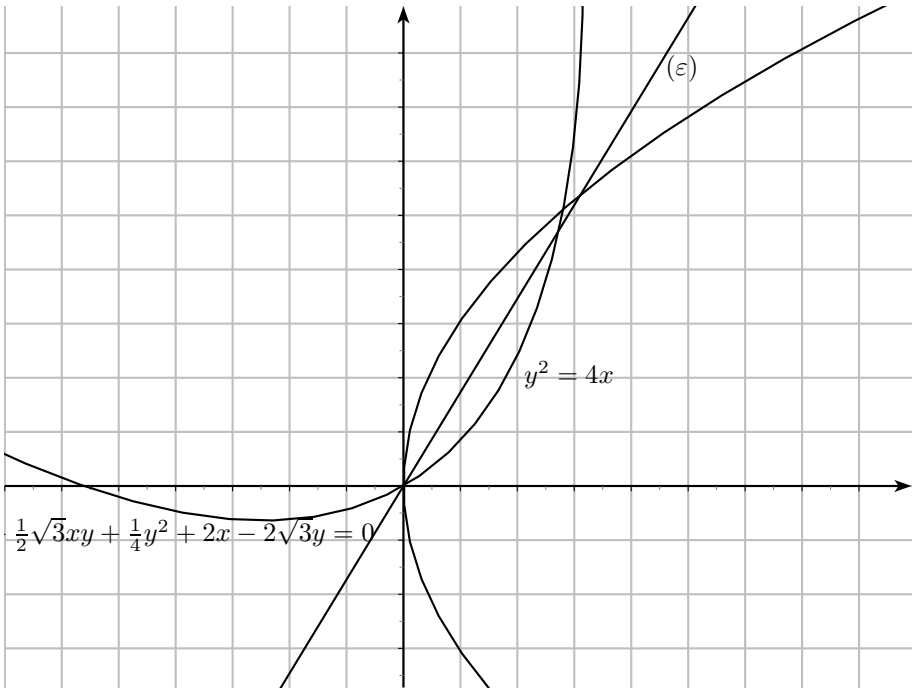
$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x' + \frac{1}{2}y'\right)^2 = 4\left(-\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\sqrt{3}y'\right)$$

Επομένως η συμμετρική καμπύλη της $y^2 = 4x$ έχει εξίσωση

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}xy + \frac{1}{4}y^2 + 2x - 2\sqrt{3}y = 0$$

Λόγω συμμετρίας αναμένεται το συμμετρικό παραβολής να είναι παραβολή. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί και από την μελέτη της εξίσωσης που είναι της μορφής

$$Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + Ey + Z = 0$$



Άσκηση στους μιγαδικούς

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

14 Δεκεμβρίου 2008

ΑΣΚΗΣΗ 1. *(xr.tsif)*[1] *Δίνεται η συνάρτηση* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *για την οποία ισχύουν:*

- $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$ *για κάθε* z_1, z_2 *στο* $\mathbb{C}$.
- $f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2)$ *για κάθε* z_1, z_2 *στο* $\mathbb{C}$.
- $f(\alpha) = \alpha$ *για κάθε* α *στο* $\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $f(z) = z$ *ή* $f(z) = \bar{z}$ *συζυγής.*

Λυση 1 (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Θέτω στη δεύτερη από τις δοσμένες $z_1 = z$ και $z_2 = \bar{z}$ και παίρνω

$$f(z) f(\bar{z}) = z\bar{z} \tag{1}$$

Θέτω στην πρώτη όπου $z_1 = z$ και $z_2 = \bar{z}$ και παίρνω

$$z + \bar{z} = f(z) + f(\bar{z}) \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι για κάθε z στο $\mathbb{C}$ ισχύει $f(z) = z$ ή $f(z) = \bar{z}$.

Λυση 2 Το κλειδί είναι που απεικονίζει η f τον i. Επειδή η f «σέβεται» τον πολλαπλασιασμό είναι $f(i^2) = (f(i))^2$. Αλλά η f είναι ταυτοτική στους πραγματικούς άρα αφού $i^2 = -1$ είναι και $(f(i))^2 = -1$. Επομένως $f(i) = i$ ή $f(i) = -i$. Τώρα $f(x + yi) = f(x) + f(y) f(i) = x + y f(i)$. Αν μεν είναι $f(i) = i$ πρόκειται για την ταυτοτική. Αν όχι δηλαδή $f(i) = -i$ έχουμε την συζυγία [2]

[1] Ανέβηκε (http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/1063887?read=865&forum=75223) με την σημείωση ότι πρόκειται για άσκηση που δόθηκε σε τέστ από τον Λ. Βαμβακάρη

[2] Η άσκηση αυτή είναι γενικά γνωστή (στην ουσία λέει ότι οι μόνοι ομομορφισμοί του σώματος $\mathbb{C}$ που αφήνουν τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ αναλλοίωτα είναι η ταυτοτική και η συζυγία). Ακριβώς με την ίδια διατύπωση η άσκηση είναι ανεβασμένη στην ιστοσελίδα της Μαθηματικής Εταιρείας (http://www.hms.gr/eme/modules/wfsection/article.php?articleid=833). Όπως είναι διατυπωμένη όλο κι όλο που έχει να δείξει κάποιος είναι ότι η f στέλνει ένα συγκεκριμένο z στον εαυτό του ή στον συζυγή του. Στην πραγματικότητα όπως προκύπτει από την προηγούμενη λύση η f:

- ή θα απεικονίζει όλα τα z στον εαυτό τους (αυτό όταν $f(i) = i$)
- είτε θα απεικονίζει όλα τα z στον συζυγή τους (αυτό όταν $f(i) = i$).

ή αλλιώς, όπως το έθεσε ο Αλέξανδρος Συγκελάκης: Οι αυτομορφισμοί της ομάδας Galois $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ που αφήνουν αναλλοίωτο (από τον ορισμό της ομάδος Galois) το κάτω σώμα (εδω: το $\mathbb{R}$) είναι οι id και σ όπου $id(i) = i$ και $\sigma(i) = -i$. Προφανώς αυτοί οι αυτομορφισμοί είναι σε πλήθος 2 διότι η επέκταση $\mathbb{C}/\mathbb{R}$) είναι Galois και το ελάχιστο πολυωνυμο του $\mathbb{C}$ πάνω από το $\mathbb{R}$ είναι βαθμού 2 $(x^2 + 1)$ και έχει ρίζες τους i και $-i$. Άρα η ομάδα Galois έχει δύο στοιχεία (δύο αυτομορφισμούς) και επειδή η μόνη διαφορά του $\mathbb{C}$ από το $\mathbb{R}$ είναι το στοιχείο i άρα αρκεί να δούμε πώς δρουν οι αυτομορφισμοί σε αυτό το στοιχείο. Απλά στέλνουμε το i στις ρίζες του ελάχιστου πολυωνύμου του i πάνω από το $\mathbb{R}$ κι έτσι έχουμε τους αυτομορφισμούς id (ταυτοτικός) και τον σ (συζυγία).

Λυση 3 (Μαργαρίτα Βαρελά) Έστω $z=\alpha+\beta i$. Είναι:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(z+\bar{z}\right)=f\left(z\right)+f\left(\bar{z}\right) \\ f\left(z\cdot\bar{z}\right)=f\left(z\right)\cdot f\left(\bar{z}\right) \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(2\alpha\right)=f\left(z\right)+f\left(\bar{z}\right) \\ f\left(\alpha^2+\beta^2\right)=f\left(z\right)\cdot f\left(\bar{z}\right) \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha=f\left(z\right)+f\left(\bar{z}\right) \\ \alpha^2+\beta^2=f\left(z\right)\cdot f\left(\bar{z}\right) \end{array}\right\}$$

Άρα οι $f(z)$, $f(\bar{z})$ αποτελούν ρίζες της εξίσωσης $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$ με $\Delta=-\beta^2$ και επομένως:

$$x_{1,2}=\frac{2\alpha\pm 2\beta i}{2}=\alpha\pm\beta i$$

.

Κύκλος και Κατσίκα

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

20 Απριλίου 2008

Ασκηση 1. [1] *Δίνεται κύκλος (O,R). Σε ένα σημείο της περιφέρειάς του, κάποιος δένει μια κατσίκα. Να βρείτε το μήκος του σχοινιού, ώστε η κατσίκα να βόσκει σε έκταση, η οποία να κόβει από τον κύκλο (O,R) το μισό του εμβαδόν.*

Λυση Θέλουμε το μικτόγραμμο τρίγωνο ΑΓΚ να έχει εμβαδόν S ίσο με το τέταρτο του αρχικού κύκλου δηλαδή $\frac{\pi R^2}{4}$. Είναι:

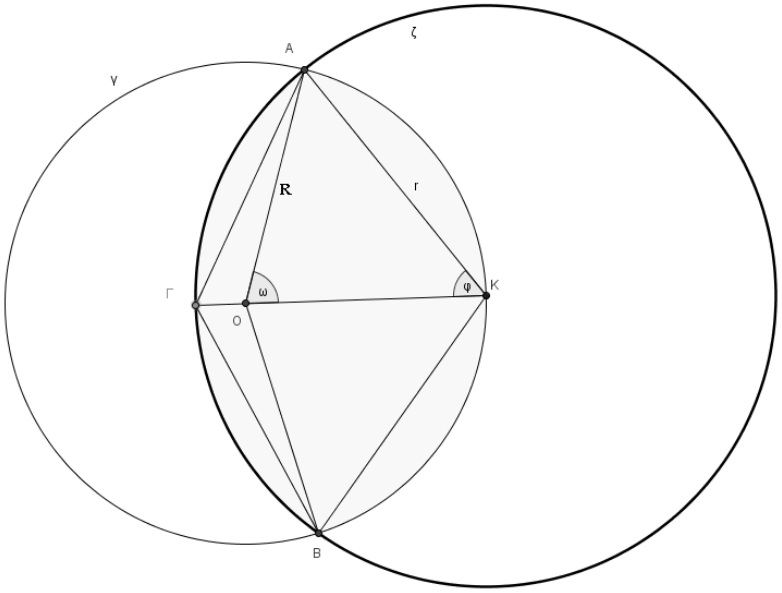
$$S = \text{Τομέας}AOK + \text{Τομέας}AK\Gamma - \text{Τρίγωνο}AOK$$

δηλαδή:

$$S = \frac{R^2\omega}{2} + \frac{r^2\varphi}{2} - \frac{R^2\sin\omega}{2}$$

Αλλά $r = 2R\sin\frac{\omega}{2}$ και $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$. Επομένως πρέπει:

$$\frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2\sin\omega - \frac{1}{2}\pi R^2\cos\omega + \frac{1}{2}R^2\omega\cos\omega = \frac{\pi R^2}{4}$$

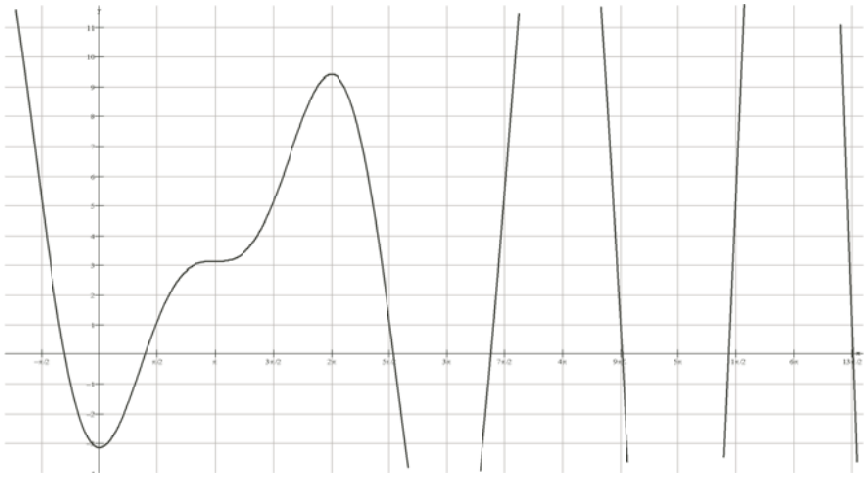


[1] Δόθηκε, με αυτή τη διατύπωση, στον δικτυακό τόπο Mathematica από το μέλος eldeli.

δηλαδή:

$$\pi - 2\sin\omega - 2\pi\cos\omega + 2\omega\cos\omega = 0, \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{2}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης που εμφανίζεται στο α΄ μέλος της παραπάνω σχέσης είναι:



Μία κατα προσέγγισιν λύση της εξίσωσης είναι 1,23590 που αντιστοιχεί σε ακτίνα $r = 1,16R$. Επομένως η αρχική άσκηση ανάγεται στην:

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Να βρεθούν οι ακριβείς λύσεις της*

$$\pi - 2\sin\omega - 2\pi\cos\omega + 2\omega\cos\omega = 0, \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{2}$$

ΛΥΣΗ Δεν την γνωρίζω.

Μακριά από τον $x'x$

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

28 Οκτωβρίου 2007

Περίληψη

Παρατίθενται κάποιες σκέψεις με αφορμή μία άσκηση που τέθηκε στο δικτυακό τόπο Mathematica[1] αλλά και στο Ελληνόγλωσσο και Αγγλόγλωσσο τμήμα του Mathlinks [2]. Η άσκηση αυτή τέθηκε στο MATHEMATICA στις 6 Οκτωβρίου 2007 και στο Mathlinks στις 8 Οκτωβρίου 2007 από το μέλος stelmarg7.

1 Η άσκηση

Ασκηση 1. *Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη στο $[0,1]$ για την οποία ισχύει $f'(x) \geq M > 0$ για όλα τα x. Δείξτε ότι υπάρχει διάστημα $I \subseteq [0,1]$ μήκους $\frac{1}{4}$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \geq \frac{1}{4}M$ για κάθε $x \in I$.*

Παραθέτω τρείς λύσεις που δόθηκαν (μία τέταρτη που δόθηκε από μένα θα προκύψει στην πορεία). Μία λύση που δόθηκε στο θέμα παλαιότερα και σε άλλη περίσταση, όπως απέδειξε ο Καθηγητής Μιχάλης Λάμπρου ήταν εσφαλμένη.

1.1 Λύση 1 (Steven Karp στο Αγγλόγλωσσο Mathlinks)

Αν είναι $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ τότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει κάποιο $c \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = f'(c)$$

Αφού $f'(c) \geq M$, έχουμε:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}M \geq \frac{1}{4}M$$

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα αφού $f'(x) > 0$ άρα $f(x) \geq f\left(\frac{3}{4}\right) \geq \frac{1}{4}M$ για όλα τα $x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Αν $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα παρόμοιο επιχείρημα για να δείξουμε ότι $f(x) \leq f\left(\frac{3}{4}\right) \leq -\frac{1}{4}M$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$.

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA
[2] http://www.mathlinks.ro

1.2 Λύση 2 (r_boris στο Ελληνόγλωσσο Mathlinks)

Η $f(x)-Mx$ είναι αύξουσα στο $[0,1]$ ενώ η $f(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,1]$ Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[\alpha,\alpha+\frac{1}{4}\right]$, $0\leq\alpha\leq\frac{3}{4}$ υπάρχει x_i ώστε $|f(x_i)|<\frac{M}{4}$. Συμπεραίνουμε ότι το ελάχιστο της $|f(x)|$ είναι μικρότερο του $\frac{M}{4}$ σε κάθε τέτοιο διάστημα.

- Αν $f(0)\geq 0$ τότε $f(x)\geq 0$ σε όλο το $[0,1]$. Ακόμη αφού η $f(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,1]$ το ελάχιστο της f στο $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ είναι το $f\left(\frac{1}{4}\right)<\frac{M}{4}$. Όμως

$$f\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{M}{4}\geq f(0)\Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)-f(0)\geq\frac{M}{4}\Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)\geq\frac{M}{4}$$

  (άτοπο)

- Αν $f(1)\leq 0$ τότε $f(x)\leq 0$ σε όλο το $[0,1]$. Τότε αντίστοιχα θα είναι $-f\left(\frac{3}{4}\right)<\frac{M}{4}$ και $f(1)-f\left(\frac{3}{4}\right)\geq\frac{M}{4}$ οπότε $-f\left(\frac{3}{4}\right)\geq\frac{M}{4}$ (άτοπο).

- Αν $f(0)\leq 0,\ f(1)\geq 0$ θα υπάρχει μοναδικό ξ με $f(\xi)=0$ και δύο διαστήματα της μορφής $\left[\alpha,\alpha+\frac{1}{4}\right]$, $\alpha\in\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right\}$ στα οποία η f διατηρεί σταθερό πρόσημο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι αυτά είναι τα $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right],\left[\frac{3}{4},1\right]$. Τότε $f\left(\frac{3}{4}\right)<\frac{M}{4}$ επειδή $f\left(\frac{3}{4}\right)=\min f(x),\ x\in\left[\frac{3}{4},1\right]$ αλλά η $f(x)-Mx$ είναι αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ οπότε $f\left(\frac{3}{4}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\geq\frac{M}{4}$ άρα $f\left(\frac{3}{4}\right)\geq\frac{M}{4}$ και πάλι άτοπο.

1.3 Λύση 3 (Καθηγητής Μιχάλης Λάμπρου στο Mathematica)

Πρώτα παρατηρούμε ότι αφου $f'(x)>0$, η συνάρτηση είναι αύξουσα. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις

- $f\left(\frac{3}{4}\right)\geq\frac{M}{4}$. Τότε για x στο διάστημα $\left[\frac{3}{4},1\right]$ έχουμε $f(x)\geq f\left(\frac{3}{4}\right)$(διότι f αύξουσα)$\geq\frac{M}{4}$ και το ζητούμενο ισχύει.

- $f\left(\frac{3}{4}\right)\leq\frac{M}{4}$. Τότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ έχουμε για κάποιο ξ: $f\left(\frac{3}{4}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)f'(\xi)=\frac{1}{2}f'(\xi)\geq\frac{M}{2}$ οπότε $f\left(\frac{1}{4}\right)\leq f\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{M}{2}\leq\frac{M}{4}-\frac{M}{2}=-\frac{M}{4}$. Αλλά τότε για x στο διάστημα $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ θα είναι $f(x)\leq f\left(\frac{1}{4}\right)$ (διότι f αύξουσα) $\leq-\frac{M}{4}$ οπότε πάλι ισχύει το ζητούμενο. **ο.ε.δ.**

ΣΧΟΛΙΟ[3]. Δεν πρέπει να προξενεί εντύπωση ότι το διάστημα στο οποίο ισχύει το ζητούμενο είναι, τελικά, ένα από τα δύο ακραία $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ ή $\left[\frac{3}{4},1\right]$ και όχι ένα γενικότερο της μορφής $\left[\alpha,\alpha+\frac{1}{4}\right]$. Πράγματι, στο παράδειγμα $f(x)=4x-2$, $M=4$, βλέπουμε ότι η $|f(x)|\geq\frac{M}{4}=1$ ισχύει ΜΟΝΟ στα $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ και $\left[\frac{3}{4},1\right]$ (κάντε το γράφημα. Είναι ευθεία).

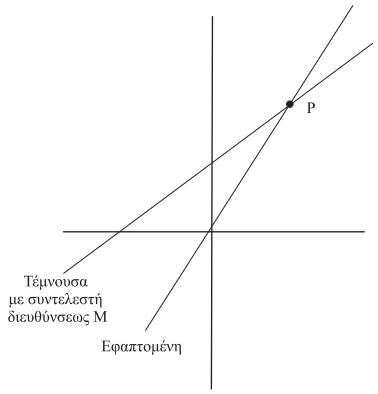
2 Κάποιες σκέψεις

Αν έχουμε μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής της παράστασης που απέχει

[3] Εστάλη μαζί με την λύση από τον Μ. Λάμπρου

από τον άξονα $x'x$ μέγιστη απόσταση και τούτο ανεξάρτητα από την συνέχεια της f. Πρόκειται για ένα από τα σημεία που αντιστοιχούν στις τιμές στα άκρα (ενδεχομένως και τα δύο). Μπορούμε να να έχουμε και περισσότερα σημεία που να απέχουν αρκούντως μεγάλη απόσταση, ας πούμε M, από τον $x'x$ πρέπει να μειώσουμε τις απαιτήσεις μας. Ο κανόνας είναι "πολλά σημεία" - μικρό M, "λίγα σημεία" - μεγάλο M. Η συγκεκριμένη άσκηση μας λέει ότι μπορούμε να πετύχουμε απόσταση τουλάχιστον $\frac{M}{4}$ αν αρκεσθούμε σε διάστημα πλάτους το πολύ $\frac{1}{4}$. Το ενδιαφέρον κατά τη γνώμη μου έγκειται στο ρόλο που διαδραματίζει στο πρόβλημα ο αριθμός $\frac{1}{4}$.

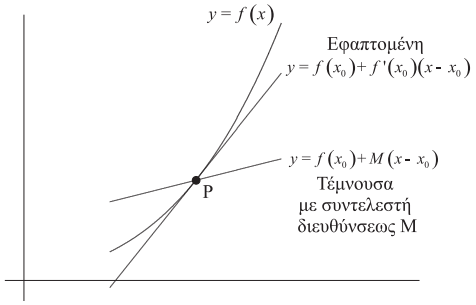
Ας δούμε τα πράγματα κάπως πιό γενικά. Ας υποθέσουμε ότι ο M είναι ένας θετικός αριθμός, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ότι ισχύει $f'(x)\geq M$ για κάθε x στο $[\alpha,\beta]$. Η f έχει θετική παράγωγο άρα είναι γνησίως αύξουσα. Μπορούμε όμως να σχηματίσουμε μία καλλίτερη ιδέα για την γραφική παράσταση της f αν δούμε τη συμπεριφορά της f γύρω από ένα σημείο της γραφικής παράστασης της ας πούμε το $P(x_0,f(x_0))$. Φυσικά η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο P θα έχει κλίση τουλάχιστον M. Η ευθεία που διέρχεται από το P και έχει κλίση M είναι η $y=f(x_0)+M(x-x_0)$. Η εφαπτομένη έχει κλίση $f'(x_0)\geq M$. Η κατάσταση θα είναι κάπως έτσι:



Ας συγκρίνουμε την f με την ευθεία $y=f(x_0)+M(x-x_0)$ σχηματίζοντας τη διαφορά

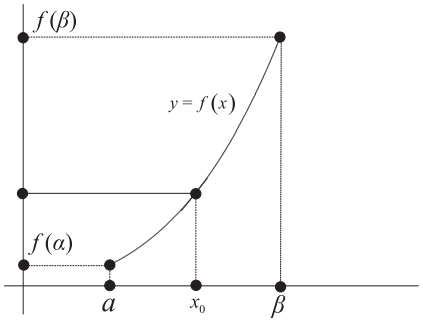
$$g(x)=f(x)-f(x_0)-M(x-x_0)$$

Παραγωγίζοντας την g βρίσκουμε ότι έχει παράγωγο $f'(x)-M\geq 0$ και επομένως η συνάρτηση g είναι αύξουσα. Επειδή είναι $g(x_0)=0$ συνάγουμε ότι θα είναι $g(x)\leq 0$ για τα x που είναι μικρότερα του x_0 και $g(x)\geq 0$ για τα για τα x που είναι μεγαλύτερα του x_0.



Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι $f(\alpha) < f(\beta)$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1, $f(\alpha) \geq 0$. Τότε η γραφική παράσταση της f εκτός ίσως από το σημείο της $A(\alpha, f(\alpha))$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.



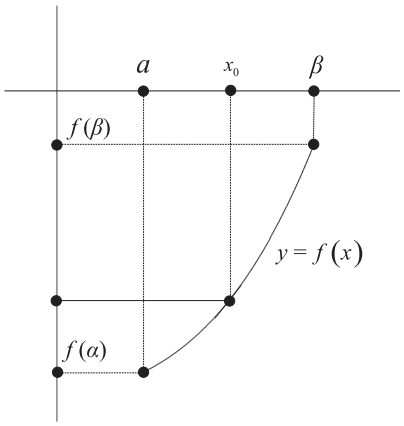
Το τυχόν σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ μπορεί να πάρει τη μορφή

$$x_0 = \alpha + c(\beta - \alpha), \qquad c \in [0,1]$$

Για $0 < c < 1$ θα είναι:
$f(x_0) \geq f(\alpha) + M(x_0 - \alpha) = f(\alpha) + M(\alpha + c(\beta - \alpha) - \alpha) =$
$= f(\alpha) + c(\beta - \alpha) M \geq c(\beta - \alpha) M$
Το διάστημα $[x_0, \beta]$ έχει μήκος $\beta - x_0 = \beta - \alpha - c(\beta - \alpha) = (\beta - \alpha)(1 - c)$ και για κάθε $x \in [x_0, \beta]$ είναι $f(x) \geq f(x_0)$ Επομένως:

- Για κάθε x στο διάστημα $[x_0, \beta]$ μήκους $(1 - c)(\beta - \alpha)$ ισχύει $f(x) \geq c(\beta - \alpha) M$ δηλαδή $|f(x)| \geq c(\beta - \alpha) M$

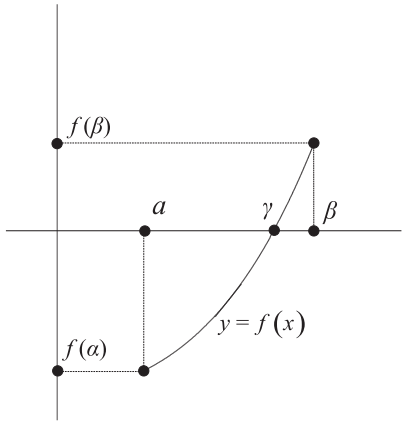
Περίπτωση 2, $f(\beta) \leq 0$. Τότε η γραφική παράσταση της f εκτός ίσως από το σημείο της $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.



Πάλι το τυχόν σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ γράφεται $x_0 = \alpha + c(\beta - \alpha)$ με $c \in [0,1]$ και για $0 < c < 1$ θα έχουμε $f(x_0) \leq f(\beta) + M(x_0 - \beta) = f(\beta) + M(\alpha + c(\beta - \alpha) - \beta) = f(\beta) - (1 - c)(\beta - \alpha) M \leq -(1 - c)(\beta - \alpha) M$. Για τα σημεία x του διαστήματος $[\alpha, x_0]$ θα είναι $f(x) \leq -(1 - c)(\beta - \alpha) M$ και το μήκος του διαστήματος $[\alpha, x_0]$ που έχει μήκος $x_0 - \alpha = \alpha + c(\beta - \alpha) - \alpha = c(\beta - \alpha)$ ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$. Επομένως:

- Για κάθε x στο διάστημα $[\alpha, x_0]$ που έχει μήκος $c(\beta-\alpha)$ ισχύει $f(x) \leq -(1-c)(\beta-\alpha)M$ δηλαδή $|f(x)| \geq (1-c)(\beta-\alpha)M$.

Περίπτωση 3, $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$**.** Τότε από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει μοναδικός, λόγω μονοτονίας, $\gamma \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\gamma) = 0$.



Αν περιορίσουμε την f σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$ θα έχουμε ότι στο μεν $[\alpha, \gamma]$ εφαμόζονται τα συμπεράσματα της περίπτωσης 2 στο δε $[\alpha, \gamma]$ τα συμπεράσματα της περίπτωσης 1. Επομένως για κάθε $c \in (0,1)$ υπάρχουν κατάλληλα διαστήματα $[\alpha, x_1] \subseteq [\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, x_2] \subseteq [\gamma, \beta]$ με:

- – Για κάθε x στο διάστημα $[\alpha, x_1]$ που έχει μήκος $c(\gamma-\alpha)$ ισχύει $|f(x)| \geq (1-c)(\gamma-\alpha)M$
  – Για κάθε x στο διάστημα $[\gamma, x_2] \subseteq [\gamma, \beta]$ που έχει μήκος $(1-c)(\beta-\gamma)$ ισχύει $|f(x)| \geq c(\beta-\gamma)M$.

Συνοψίζοντας το μήκος του διαστήματος και η ελάχιστη απόσταση που επιτυγχάνεται σε κάθε περίπτωση είναι:

Περίπτωση	Πλάτος διαστήματος	Ελάχιστη απόσταση από $x'x$
1	$(1-c)(\beta-\alpha)$	$c(\beta-\alpha)M$
2	$c(\beta-\alpha)$	$(1-c)(\beta-\gamma)M$
3	$c(\gamma-\alpha)$ ή $(1-c)(\beta-\gamma)$	$(1-c)(\gamma-\alpha)M$ ή $c(\beta-\gamma)M$

Παρατηρούμε ότι αύξηση του c επιφέρει μείωση του $1-c$. Με άλλα λόγια μπορούμε να αυξήσουμε την απόσταση από τον άξονα μειώνοντας όμως το μήκος του διαστήματος όπου αυτή η απόσταση επιτυγχάνεται. Κάποιο είδος ισορροπίας επιτυγχάνεται όταν είναι $c = 1-c$ δηλαδή όταν $c = \frac{1}{2}$. Στην περίπτωση αυτή οι τιμές του πίνακα απλουστεύονται κατά πολύ:

Περίπτωση	Πλάτος διαστήματος	Ελάχιστη απόσταση από $x'x$
1	$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$	$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)M$
2	$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$	$\frac{1}{2}(\beta-\gamma)M$
3	$\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$ ή $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$	$\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)M$ ή $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)M$

Η τρίτη περίπτωση όπου το $[\alpha, \beta]$ χωρίζεται σε δύο διαστήματα μειώνει τόσο το επιτυγχανόμενο πλάτος όσο και την απόσταση. Για τα μήκη $\gamma-\alpha$, $\beta-\gamma$ δεν

ξέρουμε τίποτα. Το μόνο που ξέρουμε είναι ότι κάποιο από αυτά θα έχει μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$. Επομένως η τιμή που επιτυγχάνουμε είναι $\frac{1}{4}(\beta-\alpha)$ για το μήκος του διαστήματος και $\frac{1}{4}(\beta-\alpha)M$ για την απόσταση. Αν πάρουμε $[\alpha,\beta]=[0,1]$ έχουμε το αποδεικτέο στην άσκηση.

3 Δύο γενικεύεσεις

Μία εξέταση των προηγουμένων σκέψεων δείχνει ότι η παραγωγισιμότητα της f χρησιμοποιήθηκε μόνο για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι όταν για $x>x_0$ η $\mathcal{C}_f$ είναι πάνω από την ευθεία $y=f(x_0)+M(x-x_0)$ ενώ για $x<x_0$ είναι κάτω από την ευθεία. Άρα αυτό που χρειάσθηκε ήταν ότι ό λόγος μεταβολής της f στα x,x_0 να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του M. Η συνέχεια της f χρησιμοποιήθηκε ουσιωδώς στην τρίτη περίπτωση της πραγμάτευσης μας. Η άσκηση μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής:

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $[0,1]$ για την οποία ισχύει*

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\geq M>0$$

για όλα τα $x_1\neq x_2$. Δείξτε ότι υπάρχει διάστημα $I\subseteq[0,1]$ μήκους $\frac{1}{4}$ τέτοιο ώστε $|f(x)|\geq\frac{1}{4}M$ για κάθε $x\in I$.

Η άσκηση αυτή λύνεται με την βοήθεια των γνώσεων της Γ΄ Λυκείου σε γενικές γραμμές, αν και πιό σύντομα, όπως προηγουμένως.

Αλλά και η υπόθεση της συνέχειας μπορεί να παρακαμφθεί αν πάρουμε

$$\gamma=\sup\{x\in[\alpha,\beta]\,|f(x)\leq 0\}=\inf\{x\in[\alpha,\beta]\,|f(x)\geq 0\}$$

Θα έχουμε τότε, όχι βέβαια για τους μαθητές του Λυκείου την άσκηση:

ΑΣΚΗΣΗ 3. *Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη στο $[0,1]$ για την οποία ισχύει*

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\geq M>0$$

για όλα τα $x_1\neq x_2$. Δείξτε ότι υπάρχει διάστημα $I\subseteq[0,1]$ μήκους $\frac{1}{4}$ τέτοιο ώστε $|f(x)|\geq\frac{1}{4}M$ για κάθε $x\in I$.

Μέσο και Μέση Τιμή

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

5 Απριλίου 2008

Είναι γνωστό (εφαρμογή του σχολικού βιβλίου) ότι αν $f(x) = ax^2 + bx + c$ τότε

$$f(p) - f(q) = (p - q)f'(\frac{p+q}{2})$$

δηλαδή ότι το μέσο $\xi = \frac{p+q}{2}$ του $[p, q]$ επαληθεύει το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[p, q]$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι τα πολυώνυμα έως βαθμού 2 είναι τα μόνα με αυτή την ιδιότητα. Συγκεκριμένα ισχύει η πρόταση:

Πρόταση 1. Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα για κάθε ζεύγος p, q να ισχύει

$$f(q) - f(p) = (q - p)f'(\frac{p+q}{2}) \tag{1}$$

τότε η f θα είναι της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1η Απόδειξη[1]

Θέτουμε στην (1) $p = 2y, q = 2x$ και έχουμε:

$$f(2x) - f(2y) = (2x - 2y)f'(x + y)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι η f είνα δύο φορές παραγωγίσιμη οπότε παραγωγίζουμε ως προς y και βρίσκουμε:

$$f'(2y) = f'(x + y) - (x - y)f''(x + y)$$

Στην παραπάνω σχέση θέτουμε $y = 0$ και έτσι θα πάρουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$xf''(x) - f'(x) = -b$$

με $b = f'(0)$. Διαιρούμε με x^2 και προκύπτει:

$$\left(\frac{f'(x)}{x}\right)' = \left(\frac{b}{x}\right)'$$

άρα

$$\frac{f'(x)}{x} = \frac{b}{x} + 2a$$

[1] Η απόδειξη οφείλεται στον Κώστα Σερίφη

ή

$$f'(x) = 2ax + b$$

οπότε:

$$f'(x) = (ax^2 + bx)'$$

και

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

για x διάφορο του 0. Λόγω συνέχειας θα είναι $f(x) = ax^2 + bx + c$ για κάθε x.

ο.ε.δ.

2η ΑΠΟΔΕΙΞΗ[2]

Οπως πριν έχουμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Από την

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

έχουμε:

$$(y - x) f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(y) - f(x)$$

Παραγωγίζουμε ως προς x και έχουμε :

$$(-1) f'\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{y-x}{2} f''\left(\frac{x+y}{2}\right) = -f'(x)$$

Θέτουμε όπου y το $-x$ οπότε :

$$-f'(0) - \frac{2x}{2} f''(0) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(x) = xf''(0) + f'(0) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} f''(0) x^2 + f'(0) x + c$$

Δηλ. $f(x) = ax^2 + bx + c$.

ο.ε.δ.

Το παρακάτω γενικότερο [3] αποτέλεσμα οφείλεται στους Aszel (1963) και Haruki (1979):

Πρόταση 2. *Αν για δύο πραγματικές συναρτήσεις f και g ισχύει*

$$f(x) - f(y) = (x - y) g\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{2}$$

για όλα τα x, y τότε υπάρχουν a, b, c ώστε

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad g(x) = 2ax + b \tag{3}$$

για όλα τα x.

[2] Η απόδειξη οφείλεται στον Αθ. Μπελήγιαννη

[3] Αν η g στην ΠΡΟΤΑΣΗ 2 είναι συνεχής τότε η f είναι παραγωγίσιμη και η g είναι η παράγωγος της οπότε αυτή η ειδική περίπτωση της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 2 ανάγεται στην ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Η παρατήρηση αυτή οφείλεται στον Κώστα Σερίφη

Αποδειξη[4]

Περιπτωση 1 $f(0)=0$

Ονομάζουμε

$$h(x)=g\left(\frac{x}{2}\right)$$

οπότε η σχέση (2) της υπόθεσης μας γίνεται

$$f(x)-f(y)=(x-y)\,h(x+y) \tag{4}$$

Θέτοντας $y=0$ βρίσκουμε

$$f(x)=xh(x)$$

Αξιοποιώντας την παραπάνω σχέση στην (4) βρίσκουμε:

$$xh(x)-yh(y)=(x-y)\,h(x+y) \tag{5}$$

Υποπεριπτωση 1.1 $g(0)=0$ ή ισοδύναμα $h(0)=0$

Θέτοντας στην (5) όπου y το $-x$ βρίσκουμε ότι $xh(x)+xh(-x)=0$ από την οποία συνάγουμε ότι η h θα είναι περιττή. Αντικάθιστώντας τώρα στην (5) όπου y το $-y$ και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι η h είναι περιττή βρίσκουμε:

$$xh(x)-yh(y)=(x+y)\,h(x+y) \tag{6}$$

Από τις (5), (6) έχουμε ότι

$$(x-y)\,h(x+y)=(x+y)\,h(x-y)$$

και θέτοντας $x+y=u$, $x-y=v$ βρίσκουμε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς u,v θα είναι

$$vh(u)=uh(v)$$

Αν ονομάσουμε $h(1)=a$ έχουμε ότι για όλα τα x είναι

$$h(x)=ax$$

και

$$g(x)=h(2x)=2\alpha x$$

Τότε αφού $f(x)=xh(x)$ θα είναι

$$f(x)=ax^2$$

και το αποδεικτέο ισχύει για την ειδική περίπτωση όπου $f(0)=g(0)=0$.

Υποπεριπτωση 1.2 $g(0)$ τυχόν

[4] Η απόδειξη προέρχεται από το βιβλίο των P.K. Sahoo, T. Reidel: *Mean Value Theorems and Functional Equations* έκδοση World Scientific, 1998, σελίδες 41-42 όπου υπάρχουν και οι σχετικές βιβλιογραφικές πληροφορίες.

Στην (5) φθάσαμε χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση $g(0)=0$. Επομένως οι f,h ικανοποιούν την (5). Αν ονομάσουμε

$$\widetilde{h}\left(x\right)=h\left(x\right)-h\left(0\right)$$

είναι $\widetilde{h}(0)=0$ και

$$h(x)=\widetilde{h}(x)+h(0)$$

και αντικαθιστώντας την $h(x)$ στην (5) βλέπουμε ότι το ζεύγος $f,\widetilde{h}$ επαληθεύει την (5) πράγμα που σημαίνει ότι $\widetilde{h}(x)=ax$, $a=\widetilde{h}(1)$ και

$$f(x)=xh\left(x\right)=x\left(\widetilde{h}\left(x\right)+h\left(0\right)\right)=x\left(ax+h\left(0\right)\right)=ax^{2}+h\left(0\right)x$$

και με $b=h\left(0\right)$ έχουμε ότι:

$$f\left(x\right)=ax^{2}+bx,\qquad g\left(x\right)=2ax+b$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 $f(0)$ τυχόν

Ονομάζουμε

$$\widetilde{f}\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(0\right)$$

και βλέπουμε ότι το ζεύγος $\widetilde{f},g$ ικανοποιεί την (2) και εμπίπτει στην ΥΠΟΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1.2 αφού $\widetilde{f}(0)=0$. Επομένως

$$\widetilde{f}\left(x\right)=ax^{2}+bx,\qquad g\left(x\right)=2ax+b$$

άρα με $f(0)=c$ είναι:

$$f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c,\qquad g\left(x\right)=2ax+b$$

ο.ε.δ.

Μια άσκηση για συζήτηση: Η παραγωγισιμότητα

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

19 Νοεμβρίου 2007

Περίληψη

Στο δικτυακό τόπο Mathematica [1] ο Κώστας Τηλέγραφος (kostas20000gr) έθεσε με μία άσκηση μερικά ερωτήματα για την συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=x-1$. Το μέλος nicspyros προσέθεσε μερικά ακόμη ερωτήματα. Μεταξύ άλλων και το να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Στο παρόν σημείωμα επιχειρείται μία απάντηση στο ερώτημα της παραγωγισιμότητας χρησιμοποιώντας αποκλειστικά γνώσεις του σχολικού βιβλίου.

Ασκηση 1. *Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=x-1$ για όλα τα x. Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη.*

Αποδειξη *Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής.* Επιλέγουμε ένα x_0. Από τις σχέσεις

$$f(x)+e^{f(x)}=x-1$$

$$f(x_0)+e^{f(x_0)}=x_0-1$$

βρίσκουμε ότι:

$$f(x)-f(x_0)+(e^{f(x)}-e^{f(x_0)})=x-x_0 \tag{1}$$

Λόγω της μονοτονίας της e^x οι αριθμοί $f(x)-f(x_0)$, $e^{f(x)}-e^{f(x_0)}$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Λόγω της (1) το πρόσημο αυτό είναι ίδιο με του $x-x_0$ (παρεπιπτόντως με την παρατήρηση αυτή έχουμε δείξει και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα). Αρα αν μεν είναι $x>x_0$ θα ισχύει

$$0<f(x)-f(x_0)<f(x)-f(x_0)+e^{f(x)}-e^{f(x_0)}=x-x_0 \tag{2}$$

ενώ αν είναι $x<x_0$ θα ισχύει

$$x-x_0=f(x)-f(x_0)+e^{f(x)}-e^{f(x_0)}<f(x)-f(x_0)<0 \tag{3}$$

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA

Από τις (2), (3) συνάγουμε ότι τα πλευρικά όρια στο x_0 της διαφοράς $f(x)-f(x_0)$ είναι 0 και επομένως η f είναι συνεχής.
Δείχνουμε τώρα ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Για x διάφορο του x_0 θα είναι και $f(x)$ διάφορο του $f(x_0)$. Επειδή η παράγωγος της e^x είναι γνησίως αύξουσα θα υπάρχει *μοναδικός* αριθμός στο διάστημα με άκρα $f(x_0), f(x)$ που ικανοποιεί το θεώρημα μέσης τιμής. Ας τον συμβολίσουμε με $s(x)$. Ορίζεται έτσι η συνάρτηση s που σε κάθε x διάφορο του x_0 αντιστοιχεί το $s(x)$. Επειδή το $s(x)$ βρίσκεται μεταξύ των $f(x_0), f(x)$ και η $f(x)$ είναι συνεχής θα είναι και η $s(x)$ συνεχής στο x_0 και το όριο της στο x_0 είναι $f(x_0)$. Θα είναι βέβαια:

$$e^{f(x)}-e^{f(x_0)}=e^{s(x)}\left(f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right) \tag{4}$$

Λόγω της (4) η (1) γράφεται

$$f(x)-f(x_0)+e^{s(x)}(f(x)-f(x_0))=x-x_0$$

και αν διαιρέσουμε με $x-x_0$ βρίσκουμε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+e^{s(x)}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1$$

οπότε:

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\frac{1}{1+e^{s(x)}} \tag{5}$$

Από την (5) συνάγουμε ότι το όριο του $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ στο x_0 υπάρχει και είναι ίσο με $\frac{1}{1+e^{f(x_0)}}$. Άρα η fείναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'\left(x\right)=\frac{1}{1+e^{f(x)}}$

Μια άσκηση για συζήτηση: Η παραγωγισιμότητα ΙΙ

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

20 Νοεμβρίου 2007

Περίληψη

Σε προηγούμενο σημείωμα με τίτλο "Μια άσκηση για συζήτηση. Η παραγωγισιμότητα" προτάθηκε μία λύση ενός θέματος που παρουσιάστηκε στο δικτυακό τόπο Mathematica. Με το παρόν σημείωμα παρουσιάζεται μία συντομότερη λύση που την οφείλουμε στον Μπάμπη Στεργίου.

Ασκηση 1. *Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=x-1$ για όλα τα x. Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη.*

Αποδειξη (Μπαμπης Στεργιου)

α) Γνωρίζουμε ήδη ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $x\neq\alpha$. Από το ΘΜΤ για την $y=e^x$ υπάρχει $\xi(x)$ ανάμεσα στο $f(x)$ και στο $f(\alpha)$, ώστε

$$e^{f(x)}-e^{f(\alpha)}=e^{\xi(x)}\left(f(x)-f(\alpha)\right)$$

Επειδή:

$$f(x)-f(\alpha)+e^{f(x)}-e^{f(\alpha)}=x-\alpha$$

λόγω της παραπάνω παίρνουμε:

$$\left[f(x)-f(\alpha)\right]\left[1+e^{\xi(x)}\right]=x-\alpha \tag{1}$$

Από αυτή προκύπτει αμέσως ότι:

$$|f(x)-f(\alpha)|\leq|x-\alpha|$$

σχέση που με το κριτήριο παρεμβολής δίνει τη συνέχεια της f στο τυχαίο α.

β) Η σχέση (1) δίνει

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{1}{1+e^{\xi(x)}}$$

με το $\xi(x)$ ανάμεσα στα $f(x)$ και $f(\alpha)$.

Αφού η f είναι συνεχής, καθώς το x τείνει στο α, το $\xi(x)$ τείνει στο $f(a)$. Επομένως

$$f'(x)=\frac{1}{1+e^{f(x)}}$$

Μία Άσκηση για τη Συνέχεια της Αντίστροφης Συνάρτησης

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

17 Οκτωβρίου 2007

Ασκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x + 1$. Δείξτε ότι ορίζεται η f^{-1} και είναι συνεχής.

Λυση

Ευκολα διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1, και επομένως αντιστρέψιμη.

Έστω ότι $f^{-1}(x) = y$ και $f^{-1}(x_0) = y_0$. Θα είναι $f(y) = x$ και $f(y_0) = x_0$. Άρα

$$x = y^5 + 2y + 1$$
$$x_0 = y_0^5 + 2y_0 + 1$$

Αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$x - x_0 = y^5 - y_0^5 + 2(y - y_0) \tag{1}$$

Στη γνωστή ταυτότητα

$$y^5 - y_0^5 = (y - y_0)\left(y^4 + y^3 y_0 + y^2 y_0^2 + y y_0^3 + y_0^4\right) \tag{2}$$

παρατηρούμε ότι αν είναι $y \geq y_0$ θα είναι και $y^5 \geq y_0^5$ ενώ αν είναι $y < y_0$ θα είναι και $y < y_0$. Άρα οι αριθμοί $y^5 - y_0^5$, $y - y_0$ έχουν το ίδιο πρόσημο επομένως ο αριθμός $A = y^4 + y^3 y_0 + y^2 y_0^2 + y y_0^3 + y_0^4 \geq 0$ είναι μη αρνητικός. Λόγω της (2) η (1) γίνεται

$$x - x_0 = (y - y_0)(A + 2)$$

όπου $A \geq 0$. Άρα $|g(x) - g(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{A+2} \leq \frac{|x-x_0|}{2}$

$$\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)\right| \leq \frac{1}{2}|x - x_0| \tag{3}$$

Επομένως:

$$-\frac{1}{2}|x - x_0| \leq f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0) \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$$

από την οποία προκύπτει:

$$f^{-1}(x_0) - \frac{1}{2}|x - x_0| \leq f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x_0) + \frac{1}{2}|x - x_0| \tag{4}$$

Όταν $x \to x_0$ έχουμε ότι $f^{-1}(x_0) - \frac{1}{2}|x - x_0| \to f^{-1}(x_0)$ και $f^{-1}(x_0) + \frac{1}{2}|x - x_0| \to f^{-1}(x_0)$. Επομένως από την (4) και το κριτήριο της παρεμβολής συνάγουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$ και επομένως η f^{-1} είναι συνεχής στο τυχόν x_0 άρα και συνεχής.

Σημειωση

Η άσκηση με την παρούσα μορφή είναι δύσκολη. Μπορεί να γίνει πιό προσιτή αν πριν ζητηθεί η απόδειξη της συνέχειας της f ζητηθεί να αποδειχθεί η σχέση (3).

Μία άσκηση συνεχείας

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

14 Δεκεμβρίου 2008

Ασκηση 1. *(dement)*[1] *Έστω φθίνουσα συνάρτηση* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) > 0$ *για κάθε* x. *Να αποδειχθεί οτι υπάρχει φθίνουσα συνεχής συνάρτηση* $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $0 < g(x) \leq f(x)$ *για κάθε* x.

Αποδειξη Το σύνολο A των σημείων ασυνεχείας της f είναι το πολύ αριθμήσιμο και επομένως έχει μέτρο 0 άρα η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη. Αυτό αποδεικνύεται και αυτοτελώς αξιοποιώντας την μονοτονία της f και τον ορισμό του ολοκληρώματος. Με την f ολοκληρώσιμη μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{2}\int_x^{x+1} f(t)\, dt$$

Προφανώς η g είναι

- Θετική
- Φθίνουσα
- Συνεχής
- Μικρότερη της f

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/1063887?read=1105&forum=75223

Μία με $f \circ g = g \circ f$

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

18 Αυγούστου 2008

Περίληψη

Στο σημείωμα αυτό σηζητούνται ορισμένες όψεις μίας άσκησης που τέθηκε στον δικτυακό τόπο Mathematica. Βλ. σχετικά:
http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/1063887?forum=75223&read=340
http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/1063887?forum=75223&read=367
http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/1063887?forum=75223&read=463

Ασκηση 1. *(Από τον chris_gatos)Υποθέτουμε ότι:*
α) οι f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο $I = [0, 1]$ των οποίων το σύνολο τιμών περιέχεται στο I.
β) ισχύει $f \circ g = g \circ f$
γ) η f είναι γνησίως αύξουσα
Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x \in I$ ώστε $f(x) = g(x) = x$

Αποδειξη Η g ως συνεχής από το $[0, 1]$ στο $[0, 1]$ έχει κάποιο σταθερό σημείο a (κλασικά: $h(x) = g(x) - x$ κ.τ.λ). Θα είναι $g(a) = a$. Αν είναι και $f(a) = a$ έχουμε τελειώσει. Αν όχι ας υποθέσουμε ότι

$$f(a) < a \ (*)$$

(η περίπτωση $f(a) > a$ δουλεύεται παρόμοια). Ορίζουμε την ακολουθία x_n με

$$x_1 = a \ \text{ και } \ x_{n+1} = f(x_n) \ (**)$$

Λόγω της (*) και της μονοτονίας της f έχουμε ότι η x_n είνα φθίνουσα και αφού όλοι οι όροι της περιέχονται στο $[0, 1]$ είναι και φραγμένη. Επομένως συγκλίνει σε κάποιο x. Παίρνοντας όρια στην (**) και αξιοποιώντας την συνέχεια της f βρίσκουμε ότι

$$x = f(x) \ (1)$$

Ακόμη $g(x_1)) = g(a) = a = x_1$ και αν υποτεθεί ότι $g(x_k) = x_k$ είναι και $g(x_{k+1})) = g(f(x_k)) = f(g(x_k))) = f(x_k) = x_{k+1}$. Άρα για όλα τα n είναι

$$g(x_n) = x_n \ (***)$$

Παίρνοντας και στην (***) όρια και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι η g είναι συνεχής βρίσκουμε ότι

$$g(x) = x \ (2)$$

Από τις (1), (2) έχουμε ότι το x είναι το ζητούμενο.

Ο Γρηγόρης Κωστάκος έδωσε μία απόδειξη εισάγοντας μία επιπλέον υπόθεση: Ότι $f([0,1]) = g([0,1]) = [0,1]$. Βλ. σχετικά:
http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/1063887?forum=75223&read=463
και
http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/17079?file=276&folder=2222.
Ωστόσο οι ιδέες που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του μας επιτρέπουν να αποδείξουμε την:

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Υποθέτουμε ότι*
α) οι f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο I=[0,1] των οποίων το σύνολο τιμών περιέχεται στο I.
β) ισχύει $f \circ g = g \circ f$
γ) η f είναι 1-1 Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x \in I$ ώστε $f(x) = g(x) = x$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού η f είναι 1-1 και συνεχής σε διάστημα θα είναι ή γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα. Ονομάζουμε S σύνολο των ριζών της $h(x) = g(x) - x$ που προφανώς είναι μη κενό. Είναι $S = h^{-1}(0)$ δηλαδή η αντίστροφη εικόνα του κλειστού συνόλου 0 και επομένως αφού h είναι συνεχής το S είναι κλειστό. Η h είναι 1-1 και συνεχής σε κλειστό διάστημα άρα και αντίστροφη της είναι συνεχής και επομένως η f είναι ομοιομορφισμός. Άρα απεικονίζει κλειστά σύνολα σε κλειστά.Αυτό σημαίνει ότι τα σύνολα

$$S_1 = S, \;\; S_2 = f(S_1), \;\; S(3) = f(S_2), \;\; ....$$

είναι όλα κλειστά. Και αφού είναι φραγμένα είναι και συμπαγή. Αν $x \in S$ τότε $g(x) = x$ και επομένως $f(g(x)) = f(x)$ δηλαδή $g(f(x)) = f(x)$που σημαίνει ότι $f(x) \in S$ και ότι το $f(S)$ περιέχεται στο S. Επομένως γενικά κάθε $S(n)$ περιέχεται στο προηγούμενο του. Έχουμε λοιπόν μία φθίνουσα ακολουθία συμπαγών συνόλων. Σύμφωνα με το θεώρημα μη κενής τομής του Cantor η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ όλων των S_n είναι μη κενή. Ας την συμβολίσουμε με L. Επειδή η f είναι 1-1 ισχύει

$$f(L) = f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(S_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{n+1} = L$$

(η υπόθεση ότι η f είναι 1-1 χρησιμοποιήθηκε ουσιωδώς στην δεύτερη ισότητα) Άρα $f(L) = L$. Προφανώς τα $a = \inf L, \; b = \sup L$ περιέχονται στο L.

Περίπτωση 1 f γνησίως αύξουσα. Τότε αν $a < x$ είναι $a \leq f(a) < f(x)$ και επειδή πρέπει το a να είναι εικόνα κάποιου x αναγκαστικά $f(a) = a$

Περίπτωση 2 f γνησίως φθίνουσα. Τότε αν $x < b$ είναι $f(x) < f(b)) \leq b$ και επειδή πρέπει το b να είναι εικόνα κάποιου x αναγκαστικά $f(b) = b$.

Σε κάθε περίπτωση υπάρχει $x \in L$ ώστε $f(x) = x$. Αλλά $x \in S$ επομένως $g(x) = x$.

ΑΣΚΗΣΗ 3. *Υποθέτουμε ότι*
α) f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ορισμένη στο I= $[0,1]$ της οποίας το σύνολο τιμών περιέχεται στο I.
β) g είναι μία οποιαδήποτε συνάρτηση ορισμένη στο $I = [0,1]$
γ) ισχύει $f \circ g = g \circ f$ Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x \in I$ ώστε $f(x) = g(x) = x$

Απόδειξη Υπάρχει x ώστε $f(x) = x$ (απλό). Θα δείξουμε ότι $g(x) = x$. Αν όχι υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1 $g(x) > x$.Τότε $f(g(x)) < f(x)$ δηλαδή $g(f(x)) < x$ ή $g(x) < x$ (άτοπο).

Περίπτωση 2 $g(x) < x$. Τότε $f(g(x)) > f(x)$ δηλαδή $g(f(x)) > x$ ή $g(x) > x$ (άτοπο).

Σημειωση

Η αρχική άσκηση όπως αναφέρει και ο chris_gatos περιλαμβάνεται στον *Απειροστικό Λογισμό* τ. Ι των Νεγρεπόντη, Γιαννακούλια, Γιωτόπουλου που εξεδόθη το 1987. Ετέθη και ως θέμα το 1987 στην Μαθηματική Ολυμπιάδα του Λενινγκραντ (τώρα Αγία Πετρούπολη ξανά) που ήταν από τους δυσκολότερους, παλαιότερους και εγκυρότερους μαθηματικούς διαγωνισμούς της τότε ΕΣΣΔ. Το πρόβλημα έχει και κάποια ιστορία που υπερβαίνει τις ασκήσεις των Ολυμπιάδων. Στο μέσον της δεκαετίας του 50 οι Eldon Dyer (1954), Allen Shields (1955) Lester Dubins (1956) διατύπωσαν ανεξαρτήτως την ακόλουθη εικασία: Αν οι f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο $I = [0, 1]$ των οποίων το σύνολο τιμών περιέχεται στο I με $fog = gof$ υπάρχει άραγε ξεΙ ώστε $f(x) = g(x) = x$; Η εικασία αυτή απέκτησε μεγαλύτερο ενδιαφέρον όταν ο J.R Isbell την έθεσε σε γενικότερη βάση ως ερευνητικό πρόβλημα το 1957 στο Δελτίο της Αμερικάνικης Μαθηματικής Εταιρείας. Στα χρόνια που ακολούθησαν από την διατύπωση της εικασίας δόθηκαν αποδείξεις της μόνο με ενίσχυση των υποθέσεων. Μεταξύ αυτών και εκείνες της άσκησης. Το θέμα διευθετήθηκε οριστικα το το 1969 από τους William M. Boyce και John Philip Huneke που σε χωριστές δημοσιεύσεις απέδειξαν δίνοντας περίπλοκα αντιπαραδείγματα ότι η εικασία δεν ισχύει.

Μία με Ασύμπτωτο Σύνθετης

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

20 Αυγούστου 2008

Άσκηση 1. *Οι συναρτήσεις* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *οι οποίες έχουν για* $x\to+\infty$ *ασυμπτώτους τις* $f^*(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha>0$ *και* $g^*(x)=\gamma x+\delta$. *Να βρεθεί η ασύμπτωτος για* $x\to+\infty$ *της* $g\circ f$

Λυση

Ονομάζουμε

$$\widetilde{f}(x)=f(x)-f^*(x)$$
$$\widetilde{g}(x)=g(x)-g^*(x)$$

Από τον ορισμό της ασυμπτώτου έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\widetilde{f}(x)=\lim_{x\to+\infty}\widetilde{g}(x)=0$$

Έχουμε

$$f(x)=\widetilde{f}(x)+f^*(x) \tag{1}$$
$$g(x)=\widetilde{g}(x)+g^*(x) \tag{2}$$

Από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}f^*(x)=\lim_{x\to+\infty}(\alpha x+\beta)=+\infty$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (1), (2) βρίσκουμε:

$$g(x)=\widetilde{g}(x)+g^*(x)=$$
$$g(f(x))=\widetilde{g}(f(x))+g^*(f(x))=$$
$$\widetilde{g}(f(x))+\gamma f(x)+\delta=$$
$$\widetilde{g}(f(x))+\gamma\left(\widetilde{f}(x)+f^*(x)\right)+\delta=$$
$$\widetilde{g}(f(x))+\gamma\widetilde{f}(x)+\gamma f^*(x)+\delta=$$
$$\widetilde{g}(f(x))+\gamma\widetilde{f}(x)+\gamma(\alpha x+\beta)+\delta=$$
$$\widetilde{g}(f(x))+\gamma\widetilde{f}(x)+\gamma\alpha x+\gamma\beta+\delta$$

Επομένως:

$$g(f(x))-(\gamma\alpha x+\gamma\beta+\delta)=\widetilde{g}(f(x))+\gamma\widetilde{f}(x)$$

Αλλά:

$$\lim_{x\to+\infty}\widetilde{g}\left(f\left(x\right)\right)=\lim_{u\to+\infty}\widetilde{g}\left(u\right)=0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\gamma\widetilde{f}\left(x\right)=0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g\left(f\left(x\right)\right)-\left(\gamma\alpha x+\gamma\beta+\delta\right)\right)=0$$

που σημαίνει ότι η ευθεία

$$y=\gamma\alpha x+\gamma\beta+\delta$$

είναι ασύμπτωτος της $g\circ f$ για $x\to+\infty$.
Παρατηρηση Είναι $\gamma\alpha x+\gamma\beta+\delta=\left(g^{*}\circ f^{*}\right)\left(x\right)$. Επομένως στην περίπτωση μας η $g\circ f$ έχει ασύμπτωτο την $g^{*}\circ f^{*}$.

Ασκηση 2. [1] *Έστω ότι η* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *έχει στο* $+\infty$ *ασύμπτωτο την* $g(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha>0$. *Να βρεθεί η ασύμπτωτος στο* $+\infty$ *της* $\underbrace{f\circ f\circ...\circ f}_{\nu\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$.

Λυση

Εργαζόμενοι όπως πριν βρίσκουμε ότι η $f\circ f$ έχει ασύμπτωτο την $g\circ g$, η $\left(f\circ f\right)\circ f$ έχει ασύμπτωτο την $\left(g\circ g\right)\circ g=g\circ g\circ g$ και γενικά η

$$\underbrace{f\circ f\circ...\circ f}_{\nu\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$$

έχει ασύμπτωτο την

$$\underbrace{g\circ g\circ...\circ g}_{\nu\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$$

Υπολογίζοντας την $\underbrace{g\circ g\circ...\circ g}_{\nu\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$ βρίσκουμε[2] ότι είναι ίση με:

- $\alpha^{\nu}x+\beta\frac{\alpha^{\nu}-1}{\alpha-1}$ αν $\alpha\neq1$
- $x+\nu\beta$ αν $\alpha=1$

[1] Πρόκειται για άσκηση που έδωσα στον δικτυακό τόπο Mathematica (http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/1063887?forum=75223&read=484)
[2] Τον τύπο της ασυμπτώτου τον έστειλε η joulia1961

Μία με ένα όριο του Cauchy

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

18 Αυγούστου 2008

Περίληψη

Στο σημείωμα αυτό δίνεται μία απόδειξη του κλασικού θεωρήματος του Cauchy ότι αν υπό ορισμένες προϋποθέσεις για την f ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x+1\right)-f\left(x\right)\right)=\ell$$

τότε και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\ell$$

Η απόδειξη δόθηκε στον δικτυακό τόπο Mathematica στις 15-6-2008 με αφορμή μία άσκηση που έστειλε στις 9-6-2008 το μέλος rastaffari.

ΑΣΚΗΣΗ 1. *(Από τον rastaffari) Αν*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x+1\right)-f\left(x\right)\right)=1$$

να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}$$

Όταν τέθηκε η συγκεκριμένη άσκηση ο Αποστόλης Παπαδογιαννάκης (7apostolis) ζήτησε (και σωστά όπως θα φανεί παρακάτω) και άλλες, επιπλέον , προϋποθέσεις για την f.

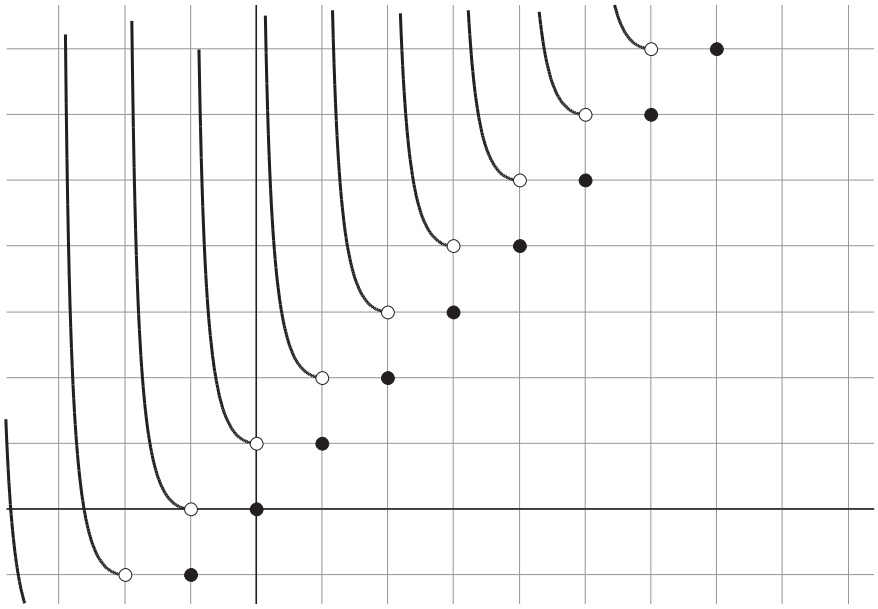
Για να υπάρχει το ζητούμενο όριο χρειάζεται κάποια επιπλέον υπόθεση για την f. Δεν απαιτείται κατ΄ ανάγκην να είναι η f συνεχής (πρόκειται για την συνήθη υπόθεση με την οποία τίθεται το θέμα). Η υπόθεση ότι η f είναι φραγμένη στο διάστημα $[0,1]$ είναι αρκετή.

(Α) Γιατί δεν επαρκούν οι υποθέσεις για την ύπαρξη του ορίου

Στα επόμενα με $[x]$, $d(x)=x-[x]$ θα συμβολίζουμε την συνάρτηση του ακεραίου μέρους και την συνάρτηση του δεκαδικού μέρους αντιστοίχως. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Z}\\ x+\dfrac{1}{x-[x]}, & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

η οποία δεν είναι φραγμένη στο [0,1] αλλά ικανοποιεί την υπόθεση κατά τετριμμένο τρόπο. Επειδή η συνάρτηση του δεκαδικού μέρους είναι περιοδική με περίοδο 1 ισχύει $f(x+1)-f(x)=1$ αλλά όπως μπορεί να διαπιστωθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ διότι η $\frac{1}{x(x-[x])}$ δεν είναι φραγμένη (βλ. Σχήμα 1).



Σχήμα 1: *Η συνάρτηση* $f(x)$

(Β) Εύρεση του ορίου με την επιπλέον υπόθεση ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη στο $[0,1]$**.**
Ονομάζουμε $g(x)=f(x+1)-f(x)$ Προσθέτοντας τις ισότητες:

$$\begin{aligned}
&f(d(x)+1)-f(d(x))=g(d(x))\\
&f(d(x)+2)-f(d(x)+1)=g(d(x)+1)\\
&....\\
&f(d(x)+[x])-f(d(x)+[x]-1)=g(d(x)+[x]-1)
\end{aligned}$$

βρίσκουμε:

$$f(x)=f(d(x)+[x])=f(d(x))+\sum_{i=1}^{[x]-1}g(d(x)+i)$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(d(x))}{x}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{[x]-1}g(d(x)+i)}{[x]}\cdot\frac{[x]}{x}$$

Θεωρούμε θετικό αριθμό ε. Επειδή είναι $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\ell$ θα υπάρχει θετικός ακέραιος $m(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε αν $[x]\geq m(\varepsilon)$ να ισχύει

$$\ell-\frac{\varepsilon}{2}<g(d(x)+[x])<\ell+\frac{\varepsilon}{2}$$

Επίσης υπάρχει θετικός ακέραιος $n(\varepsilon) > m(\varepsilon)$ ώστε αν $[x] > n(\varepsilon)$ να ισχύει:

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\sum_{i=1}^{m(\varepsilon)-1} g(d(x)+i)}{[x]} < \frac{\varepsilon}{2}$$

και επομένως αφού γιαυτά τα x θα είναι και

$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\sum_{i=m(\varepsilon)}^{[x]-1} g(d(x)+i)}{[x]} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}$$

έχουμε ότι

$$\ell - \varepsilon < \frac{\sum_{i=1}^{[x]-1} g(d(x)+i)}{[x]} < \ell + \varepsilon$$

και επομένως

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{[x]-1} g(d(x)+i)}{[x]}\right) = \ell$$

Αλλά

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x} = 1$$

και

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(d(x))}{x} = 0$$

(εδώ ακριβώς χρησιμοποιείται το φραγμένο της συνάρτησης) καί έτσι έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \ell$$

Σημειωση

Η παρούσα πρόταση παρουσιάστηκε το 1821 από τον μέγα Κωσύ

1.er Théorème. *Si, pour des valeurs croissantes de x, la différence*

$$f(x+1) - f(x)$$

converge vers une certaine limite k, la fraction

$$\frac{f(x)}{x}$$

convergera en même temps vers la même limite.

Η πρόταση όπως διατυπώνεται στο βιβλίο του Cauchy

στο έργο του «*Μαθήματα Αναλύσεως της Βασιλικής Πολυτεχνικής Σχολής. Μέρος Πρώτο: Αλγεβρική Ανάλυση*» έργο στο οποίο «χτίζεται» η ε-δ προσέγγιση του ορίου.

Μία με ένα χαρακτηρισμό του μέτρου

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

19 Αυγούστου 2008

Περίληψη

Μία άσκηση που δίνει ένα χαρακτηρισμό του μέτρου των μιγαδικών αριθμών δηλαδή μία σειρά ιδιοτήτων που «φωτογραφίζουν» το μέτρο. Την έδωσα στον δικτυακό τόπο Mathematica και λύσεις έδωσαν ο Κώστας Σερίφης και ο antonis_math:
http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/1063887?read=444&forum=75223

Ασκηση 1. *Εστω $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *$\alpha(zw) = \alpha(z)\alpha(w)$ για όλα τα z, w.*
2. *$\alpha(x) = x$ για κάθε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό x.*
3. *Υπάρχει θετικός πραγματικός m τέτοιος ώστε $\alpha(z) \leq m$ για όλα τα z που η εικόνα τους ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.*

Να αποδειχθεί ότι η α συμπίπτει με την $|...|$ δηλαδή $\alpha(z) = |z|$ για κάθε z.

Αποδειξη 1 (Κώστας Σερίφης) Αρκεί να δείξουμε ότι για τους μιγαδικούς z με $|z| = 1$ είναι $\alpha(z) = 1$. Τότε με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής μορφής του τυχαίου z, καθώς και την ιδιότητα 2, έχουμε το ζητούμενο.

Από την $\alpha(zw) = \alpha(z)\alpha(w)$ για όλα τα z, w επαγωγικά έχουμε ότι $\alpha(z^\nu) = [\alpha(z)]^\nu$ για κάθε θετικό ακέραιο ν. Ακόμα, για κάθε μιγαδικό z υπάρχει μιγαδικός w ώστε $w^2 = z$. Έτσι $\alpha(z) = \alpha(w^2) = [\alpha(w)]^2 \geq 0$. Εύκολα προκύπτουν ότι: $\alpha(1) = 1$ και ότι $m \geq 1$. Έστω z ώστε $|z| = 1$ οπότε $\alpha(1) = \alpha(z\bar{z}) = \alpha(z)\alpha(\bar{z})$ δηλαδή $\alpha(\bar{z}) = \frac{1}{\alpha(z)}$. Όμως $\alpha(z) \leq m$ και $\alpha(\bar{z}) \leq m$. Άρα

$$\frac{1}{m} \leq \alpha(z) \leq m$$

για κάθε z με $|z| = 1$, αφού $\alpha(z)$ και $\alpha(\bar{z}) \leq 1$. Όμως αν ο z έχει μέτρο 1 και ο z^ν θα έχει μέτρο 1. Επομένως: $\frac{1}{m} \leq \alpha(z^\nu) \leq m$ άρα και

$$\frac{1}{m} \leq [a(z)]^\nu \leq m \quad \text{για κάθε θετικό ακέραιο} \quad \nu \tag{1}$$

Έστω ότι $\alpha(z) = k$. Προφανώς $k > 0$ και λογαριθμώντας την (1) έχουμε:

$$-\ln m \leq \nu \ln k \leq \ln m$$

για κάθε θετικό ακέραιο ν: Αυτό θα μας οδηγήσει σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι k διαφορετικό του 1. Τελικά πρέπει $\alpha(z) = 1$ για κάθε z με $|z| = 1$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν στη σχέση (1) πάρουμε τη $\nu-$οστή ρίζα και όριο όταν $n \to +\infty$ θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή $\alpha(z) = 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 2 Θέλουμε

$$\alpha(z) = |z| \tag{2}$$

Για $z = 0$ αυτό το έχουμε από την υπόθεση. Ας πούμε ότι για κάποιο μη μηδενικό z η (2) δεν ισχύει. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha(z) > |z|$ (αλλιώς δουλεύουμε με τον $\frac{1}{z}$). Ονομάζουμε $w = \frac{z}{|z|}$. Αφενός ο w ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο και αφετέρου

$$\alpha(w) = \alpha\left(\frac{1}{|z|}\right)\alpha(z) = \frac{1}{|z|}\alpha(z) = r > 1$$

Τότε και ο w^n ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο. Είναι

$$M \geq \alpha(w^n) = \alpha(w)^n > r^n$$

για κάθε n δηλαδή

$$n < \frac{\ln M}{\ln r}$$

για όλα τα n (άτοπο).

Μία με Κλιμακωτή Συνάρτηση

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

19 Αυγούστου 2008

ΑΣΚΗΣΗ 1. *(Από stelmarg7)* [1] *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = x^2 - 1$ *στο διάστημα* $[-3, 3]$. *Να κατασκευαστεί μια ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα στην* f. *(Μια συνάρτηση* s *ορισμένη στο* $[\alpha, \beta]$ *λέγεται κλιμακωτή αν υπάρχει μια διαμέριση* $l_0, l_1, l_2, ...l_n$ *του* $[\alpha, \beta]$ *τέτοια ώστε η* s *να είναι σταθερη σε κάθε διάστημα* $(l_{i-1}, l - i)$ *για κάθε* i *ανήκει στο* $\{1, 2, 3, ...n\}$.*)*

ΛΥΣΗ Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε μία ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων που να συγκλίνει στην f κατά πολλούς τρόπους, Αναφέρω ένα: Θεωρούμε μία ακολουθία διαμερίσεων που η λεπτότητα τους να τείνει στο 0. Λόγου χάρη μπορούμε να πάρουμε για κάθε n την διαμέριση με άκρα:

$$\alpha_k = \alpha + k\frac{\beta - \alpha}{n} \quad k = 0, ..., n$$

Ορίζουμε στη συνέχεια την κλιμακωτή συνάρτηση f_n με

$$f_n(x) = f(\alpha_k) \text{ για } x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}) \quad k = 0, ...n - 1 \text{ και } f_n(\beta) = f(\alpha_{n-1})$$

Ας θεωρήσουμε $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο συμπαγές $[\alpha, \beta]$ (= κλειστό και φραγμένο, από το θεώρημα Heine-Borel) θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής, Άρα υπάρχει κατάληλος $\delta > 0$ τέτοιος ώστε:

$$\text{Αν } |x - y| < \delta \text{ τότε να είναι } |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad (*)$$

Αν λοιπόν φροντίσουμε ώστε η λεπτότητα $(\beta - \alpha)/n$ της διαμέρισης να είναι μικρότερη του δ, και αυτό είναι εφικτό για κατάλληλη τιμή n_0 του n, τότε κάθε διαμέριση με $n > n_0$ θα έχει και αυτή λεπτότητα μικρότερη του δ. Τότε κάθε x από το $[\alpha, \beta]$ θα ανήκει σε κάποιο από τα διαστήματα

$$[\alpha_0, \alpha_1), [\alpha_1, \alpha_2), ..., [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$$

(μόνο το τελευταίο διάστημα είναι κλειστό-κλειστό για να μη χάσουμε το β) τότε η απόσταση του από το κάτω άκρο του διαστήματος θα είναι μικρότερη του δ. Δηλαδή αν το x ανήκει στο διάστημα με κάτω άκρο το a_k τότε $|a_k - x| < \delta$. Από την (*) έχουμε ότι

$$|f(x) - f(\alpha_k)| < \varepsilon$$

[1] http://clubs.patheinder.gr/MATHEMATICA/1063887;read=308&forum=75223

Αλλά $f(\alpha_k) = f_n(x)$ και επομένως

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για όλα τα x και για όλα τα $n > n_0$ πράγμα που μας εξασφαλίζει ότι $f_n \xrightarrow[\text{ομοιόμορφα}]{} f$,

Το ότι έχουμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$ στο $[-3, 3]$ είναι λεπτομέρειες. Άνετα μπορούμε να προσαρμόσουμε την γενική ιδέα.

Μία με Κοινά Σημεία της $\mathcal{C}_f$ με την $y = x$

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

19 Αυγούστου 2008

Περίληψη

Μία άσκηση όπου αποδεικνύεται ότι η γραφική παράσταση μίας συνεχούς και γνησίως φθίνουσας συνάρτησης ορισμένης στο $\mathbb{R}$ έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την πρώτη διχοτόμο των αξόνων. Την έδωσα στον δικτυακό τόπο Mathematica και λύσεις έστειλαν οι vlitsar και antonis_math:
http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/17063?read=77&forum=75226
επίσης λύση έδωσε ο Γρηγόρης Κωστάκος:
http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/17079?file=273&folder=2222

ΑΣΚΗΣΗ 1. *Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα και συνεχής. Να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{C}_f$ τέμνει την $y = x$ ακριβώς σε ένα σημείο*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 1 (antonis_math) Έστω οτι δεν έχει κανένα κοινό σημείο. Τότε θα ισχύει $f(x) - x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε αφού $f(x) - x$ συνεχής θα διατηρεί πρόσημο και θα είναι:
α) ή $\mathbf{f(x) > x}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$. Τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με το οτι η f είναι γνησίως φθίνουσα διότι για τυχόν x_0 είναι για $x > x_0$ και $f(x) < f(x_0)$ και επομένως αποκελίεται η f στο $+\infty$ να έχει όριο $+\infty$.
β) είτε $\mathbf{f(x) > x}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ οπότε $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ που πάλι όπως διαπιστώνεται ανάλογα έρχεται σε αντίθεση με το ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως η $\mathcal{C}_f$ και η $y = x$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. Το ότι το κοινό αυτό σημείο είναι μοναδικό προκύπτει από το ότι η συνάρτηση $f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
ΑΠΟΔΕΙΞΗ 2 (vlitsar) [1] Αν $f(x) \geq x$ για καθε πραγματικο x τότε $f(f(x)) \geq f(x)$ (αν βάλουμε όπου x το $f(x)$) και $f(f(x)) \leq f(x)$ αφού f γνησίως φθίνουσα. Αρα $f(f(x)) = f(x)$ και επειδή f 1-1 έχουμε $f(x) = x$ η οποία ειναι γνησίως αύξουσα άτοπο. Αρα υπάρχει πραγματικός κ τετοιος ώστε $f(\kappa) < \kappa$. Ομοια αν $f(x) \leq x$ για όλα τα x υπάρχει πραγματικός λ τετοιος ώστε $f(\lambda) > \lambda$. Στο διάστημα με άκρα κ, λ εφαρμόζω το θεώρημα Bolzano για την $g(x) = f(x) - x$ και επειδή g φθίνουσα έχω το ζητούμενο
ΑΠΟΔΕΙΞΗ 3 Ονομάζουμε $h(x) = f(x) - x$ που είναι συνεχής και προκύπτει εύκολα, με τον ορισμό, ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

- Για $x > 0$ θα είναι $h(x) = f(x) - x < f(0) - x$ και επειδή η $f(0) - x$ έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ το αυτό θα ισχύει και με την h.

[1] Ανέφερε ότι προέρχεται από το βιβλίο:
Μάστακας, Γαρατζιώτης, «Μαθηματικά για την Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση» εκδ. ΚΕΔΡΟΣ

- Για $x < 0$ θα είναι $h(x) = f(x) - x > f(0) - x$ και επειδή η $f(0) - x$ έχει στο $-\infty$ όριο το $+\infty$ το αυτό θα ισχύει και με την h.

Η h έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$ και φυσικά έχει μοναδική ρίζα.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η Άσκηση 1 προέκυψε κοιτώντας την παρακάτω άσκηση:

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Έστω $f \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι το σύστημα*

$$\left.\begin{array}{l} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{array}\right\}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

που την βρήκα στο βιβλίο «*Putnam and Beyond*» των Gelca, Andreescu (Springer, 2007). Αν κάποιος ακολουθήσει το πιό φυσικό στα συστήματα, να δουλέψει με αντικατάσταση, τότε θα βρεί

$$x = f(y) = f(f(z)) = f(f(f(x))$$

και αρκεί να δείξει ότι με $g = fofof$ η εξίσωση $x = g(x)$ έχει ακριβώς μία λύση. Μα η $g = fofof$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής επομένως όλο κι΄ όλο που χρειάζεται είναι να εξασφαλίσουμε, σαν μικρό λήμμα, ότι την Άσκηση 1. Πρόκειται για μία τυπική περίπτωση προβλήματος διαγωνισμών όπου η δυσκολία του προκύπτει από το έντεχνο καμουφλάρισμα μίας απλής ιδέας.

$f\left(f\left(x\right)\right)=e^{x}$

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

29 Αυγούστου 2008

Περίληψη

Στον δικτυακό τόπο Mathematica [1] ζητήθηκε (antonis_math) να αποδειχθεί ότι:

Αν για μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $(f\circ f)(x)=e^{x}$ για κάθε x τότε η f θα παίρνει και αρνητικές τιμές.

Απαντήσεις έδωσαν τα μέλη m0v και Θωμάς Ραϊκόφτσαλης.
Κατα την συζήτηση ετέθη το ερώτημα

Υπάρχει τέτοια συνάρτηση ;

Στο παρόν σημείωμα, χρησιμοποιώντας γνωστές ιδέες και τεχνικές, δίνεται μία απάντηση στο ερώτημα αυτό.

Αναζητούμε γνησίως αύξουσες[2] συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f\left(f\left(x\right)\right)=e^{x} \tag{1}$$

Έστω f μία γνησίως αύξουσα λύση της (1) (Σημειώστε ότι ακόμη δεν ξέρουμε αν τέτοια λύση υπάρχει). Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής. Ας πάρουμε ένα x_0. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το όριο της στο x_0 από μικρότερες τιμές θα υπάρχει και θα είναι το $\alpha=\sup f((-\infty,x_0))$. Το ίδιο και και για το όριο από μεγαλύτερες τιμές: Θα είναι το $\beta=\inf f((x_0,+\infty))$. Φυσικά θα ισχύει:

$$\alpha\leq f(x_0)\leq\beta \tag{2}$$

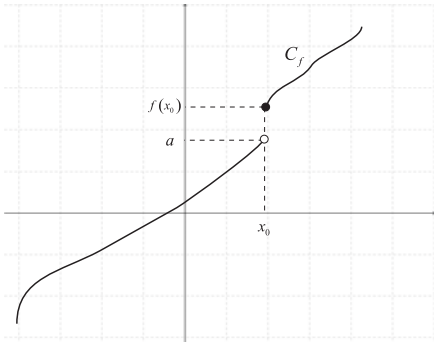
Αν η f είναι ασυνεχής στο x_0 θα πρέπει μία τουλάχιστον από τις ανισότητες της (2) να είναι γνήσια. Χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα ας υποθέσουμε ότι είναι η πρώτη δηλαδή

$$\alpha<f(x_0) \tag{3}$$

Η (3) μας λέει ότι το σύνολο τιμών της f έχει μία τουλάχιστον «τρύπα»: το διάστημα $(\alpha,f(x_0))$. Αυτό λόγω μονοτονίας. Σχηματίζοντας την $f\circ f$ θα εισάγουμε στην «δεύτερη» f τιμές από το σύνολο τιμών της «πρώτης». Άρα δεν θα εισαχθούν τιμές από το $(\alpha,f(x_0))$.

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/17063?forum=56996&read=789

[2] θα μπορούσαμε να πούμε και «αύξουσες». Θα ήταν το ίδιο αφού από την $f\left(f\left(x\right)\right)=e^{x}$ προκύπτει εύκολα ότι η f είναι 1-1.



Πάλι λόγω μονοτονίας το σύνολο τιμών της $f \circ f$ δεν θα περιέχει τιμές από το διάστημα $(f(\alpha), f(f(x_0)))$. Όμως για $\gamma < \alpha$ είναι

$$f(\gamma) < \alpha < f(x_0)$$

και

$$f(f(\gamma)) < f(\alpha) < f(f(x_0))$$

οπότε $e^\gamma < f(\alpha) < e^{x_0}$ Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για την συνεχή e^x θα είναι $f(\alpha) = e^\delta$ για κάποιο δ και επομένως $f(\alpha) = f(f(\delta))$ δηλαδή το $f(\alpha)$ είναι τιμή της $f \circ f$ (άτοπο).
Αν λοιπόν η (1) έχει γνησίως αύξουσες λύσεις αυτές θα είναι συνεχείς. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η f είναι μία γνησίως αύξουσα και συνεχής λύση (1) (που εξακολουθούμε να μην ξέρουμε αν υπάρχει). Παρατηρούμε ότι θα απεικονίζει το $(-\infty, +\infty)$ σε ένα ανοικτό διάστημα. Αυτό δε μπορεί να είναι το $(-\infty, +\infty)$ διότι τότε και η $f \circ f$, δηλαδή η e^x θα είχε σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Αρα το σύνολο τιμών της f θα πρέπει να είναι της μορφής (k_1, s) όπου το k_1 είναι πραγματικός και το s είναι πραγματικός αριθμός ή $+\infty$. Δε μπορεί όμως το s να είναι πραγματικός διότι τότε η f (άρα και η $f \circ f$) θα ήταν φραγμένη άνω πράγμα αδύνατο διότι η e^x δεν είναι. Επομένως

$$f((-\infty, +\infty)) = (k_1, +\infty)$$

Αλλα πρέπει $f((k_1, +\infty)) = (0, +\infty)$ αφού οι e^x, $f \circ f$ έχουν το ίδιο σύνολο τιμών. Αλλά

$$f((k_1, +\infty)) = (f \circ f)((-\infty, +\infty)) = (f \circ f)((-\infty, k_1]) \cup (f \circ f)((k_1, +\infty)) =$$

$$(0, e^{k_1}] \cup (e^{k_1}, +\infty) = (-\infty, +\infty)$$

και τότε

$$f((-\infty, +\infty)) = f(-\infty, k_1] \cup f((k_1, +\infty)) = f((-\infty, k_1]) \cup (0, +\infty)$$

δηλαδή:

$$(k_1, +\infty) = f((-\infty, k_1]) \cup (0, +\infty) \tag{4}$$

Από την (4) συνάγουμε ότι

$$f((-\infty, k_1]) = (k_1, 0] \tag{5}$$

Ιδιαιτέρως ότι $k_1 < 0$ δηλαδή η f θα πάρει και αρνητικές τιμές.

Η (5) σε συνδυασμό με την (1), όπως θα δούμε στην πορεία, διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην διαμόρφωση της f.

Ας ονομάσουμε $k_2=0$ και έχουμε

$$f((k_1,k_2])=f(f((-\infty,k_1]))=(k_2,k_3]\ \text{όπου}\ k_3=e^{k_1}$$

$$f((k_2,k_3])=f(f((k_1,k_2]))=(k_3,k_4]\ \text{όπου}\ k_4=e^{k_2}=e^{0}=1$$

$$f((k_3,k_4])=f(f((k_2,k_3]))=(k_4,k_5]\ \text{όπου}\ k_5=e^{k_3}$$

Με αυτό τον τρόπο σχηματίζουμε:

α) Μία ακολουθία αριθμών

$$k_1<k_2<k_3<k_4<....$$

με $k_1<0$, $k_2=0$, $k_{n+2}=e^{kn}$ η οποία καθορίζεται πλήρως από τον πρώτο όρο της $k_1=0$ και τείνει στο $+\infty$

β) Μία ακολουθία διαστημάτων

$$J_1=(-\infty,k_1],J_2=(k_1,k_2],J_3=(k_2,k_3],J_4=(k_3,k_4],J_1=(k_4,k_5],....$$

που η ένωση της είναι το $\mathbb{R}$ και $f\left(J_n\right)=J_{n+1}$.

Ας ονομάσουμε τώρα f_n τον περιορισμό της f στο J_n. Θα ισχύει φυσικά $f_n\left(J_n\right)=J_{n+1}$. Από την (1) θα είναι

$$f_{n+1}\circ f_n=\exp$$

όπου με exp δηλώνουμε την εκεθετική συνάρτηση. Όμως κάθε μία από τις f_n είναι αντιστρέψιμη (με πεδίο ορισμού το J_{n+1} και σύνολο τιμών το J_n. Επομένως λύνοντας την τελευταία σχέση ως προς f_{n+1} θα βρούμε

$$f_{n+1}=\exp\circ f_n^{-1} \tag{6}$$

Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει, λόγω της (6) ότι αν γνωρίζουμε την f_1 τότε γνωρίζουμε και την f_2 και μετά την f_3 κοκ και επομένως την f αφού ξέροντας πως δρα η f σε κάθε διάστημα J_n την γνωρίζουμε πλήρως. Προκύπτει από την «συγκόληση» των f_n και θα είναι μία «κλαδωτή» συνάρτηση με άπειρους «κλάδους» τις f_n. Τι θα είναι η f_1; Θα είναι

- συνεχής
- γνησίως αύξουσα
- με πεδίο ορισμού το J_1
- σύνολο τιμών το J_2

Παρατηρούμε ότι αν επιλέξουμε την f_1 με τις παραπάνω προδιαγραφές τότε:

α Η f θα είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι κάθε μία από τις f_n είναι γνησίως αύξουσα λόγω της (6). Αν πάρουμε $p<q$ αν μεν τα p, q ανήκουν στο J_n θα είναι $f\left(p\right)=f_n\left(p\right)<f_n\left(q\right)=f\left(q\right)$ ενώ αν ανήκουν στα J_n, J_m θα είναι $n<m$ και τα $f\left(p\right)=f_n\left(p\right)$, $f\left(q\right)=f_m\left(q\right)$ ανήκουν στα J_{n+1}, J_{m+1} οπότε αυτόματα είναι το πρώτο μικρότερο του δεύτερου.

β Η f θα είναι συνεχής. Η μεν συνέχεια στο εσωτερικό του κάθε ενός από τα J_n εξασφαλίζεται αμέσως από την (6). Για τα άκρα k_n $(n>1)$ παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to k_n^-} f(x)=\lim_{x\to k_n^-} f_n(x)=f_n(k_n)=f(k_n)=k_{n+1}$$

$$\lim_{x\to k_n^+} f(x)=\lim_{x\to k_n^+} f_{n+1}(x)=_{(6)}\lim_{x\to k_n^+} e^{f_n^{-1}(x)}=_{\left(f_n^{-1}\ \text{συνεχής}\right)}\lim_{u\to k_{n-1}^+} e^u=e^{k_{n-1}}$$

Αλλά $k_{n+1}=e^{k_{n-1}}$ και επομένως η f είναι συνεχής στα k_n $(n>1)$. Στο k_1 η συνέχεια προκύπτει εύκολα από το προηγούμενο αρκεί να λάβουμε υπ'οψιν ότι $\lim\limits_{x\to k_1^+} e^{f_1^{-1}(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^u=1=k_2$.

γ Ισχύει $f(f(x))=e^x$. Πράγματι αν $x\in J_n$ τότε $f(f(x))=f(f_n(x))=f_{n+1}(f_n(x))=\left(\exp\circ f_n^{-1}\circ f_n\right)(x)=e^x$

Επομένως θα υπάρχουν μονότονες λύσεις της (1) αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν τις προδιαγραφές που θέσαμε. Τέτοιες δε προφανώς υπάρχουν για παράδειγμα μία είναι η

$$f_1(x)=-\frac{k_1^2}{x}+k_1$$

Από τα προηγουμενα συνάγουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1. *Έστω k_1 ένας οποιοσδήποτε αρνητικός πραγματικός αριθμός, $k_2=0$ και f_1 μία οποιαδήποτε γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $(-\infty,k_1]$ και σύνολο τιμών το $(k_1,k_2]$.*

1. *$k_n=e^{k_{n-2}}$, $n>2$*
2. *$J_1=(-\infty,k_1)$ και $J_n=[k_{n-1},k_n)$ για $n>2$*
3. *για $n>2$ είναι $f_n:J_n\to J_{n+1}$ με $f_{n+1}=\exp\circ f_n^{-1}$*

τότε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\cdots & \cdots & \cdots\\ f_n(x) & , & x\in J_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{cases}$$

είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής και επαληθεύει την

$$f(f(x))=e^x\ \ (*)$$

Όλες οι αύξουσες συναρτήσεις που επαληθεύουν την (*) προκύπτουν με τον παραπάνω τρόπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

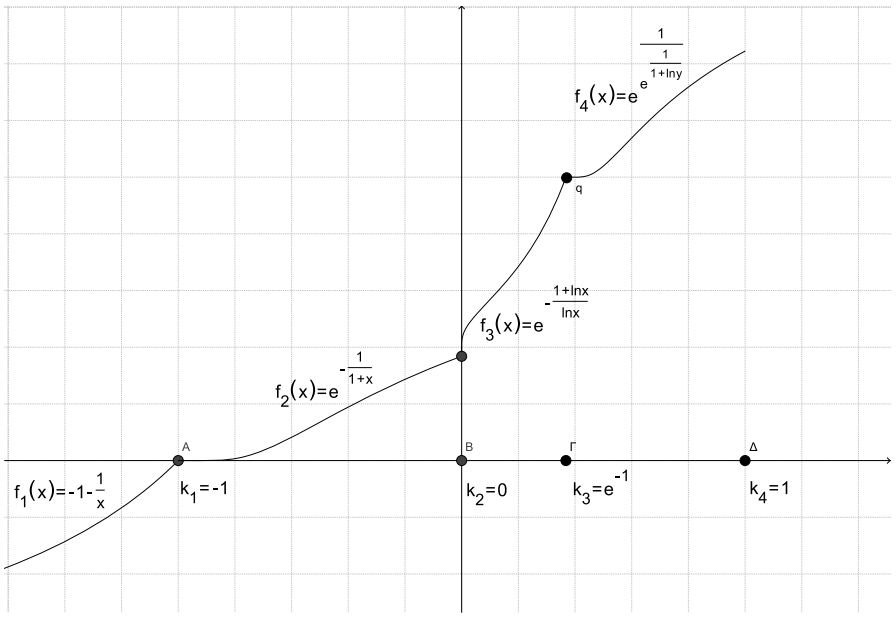
Αν επιλέξουμε $k_1=-$, $f_1(x)=-1-\frac{1}{x}$ έχουμε

$$k_1=-1,\quad k_2=0,\quad k_3=e^{-1},\quad k_4=1$$

και

$$f_1(x)=-1-\frac{1}{x},\qquad f_2(x)=e^{-\frac{1}{1+x}},\quad f_3(x)=e^{-\frac{1+\ln x}{\ln x}},\qquad f_4(x)=e^{\frac{1}{e^{\frac{1}{1+\ln y}}}},\ldots$$

Οι δύο αυτές επιλογές ορίζουν πλήρως την f που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.


$f_4(x)=e^{e^{\frac{1}{1+\ln y}}}$
q
$f_3(x)=e^{-\frac{1+\ln x}{\ln x}}$
$f_2(x)=e^{-\frac{1}{1+x}}$
A
B
Γ
Δ
$f_1(x)=-1-\frac{1}{x}$
$k_1=-1$
$k_2=0$
$k_3=e^{-1}$
$k_4=1$

Μονότονες Λύσεις της Συναρτησιακής Εξίσωσης του Cauchy

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

28 Νοεμβρίου 2007

Περίληψη

Πρόκειται για μία άσκηση που προέκυψε από μία συζήτηση στον δικτυακό τόπο Mathematica[1]

Ασκηση 1. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία γνησίως μονότονη συνάρτηση για την οποία ισχύει*

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

για όλα τα x,y. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\alpha x$ για κάποιο $\alpha\neq 0$.

Αποδειξη.

Αποδεικνύεται εύκολα (πρόκειται για γνωστή άσκηση) ότι:

1. $f(0)=0$
2. $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
3. $f(\mu x)=\mu f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και κάθε $\mu\in\mathbb{N}$
4. $f\left(\frac{x}{\nu}\right)=\frac{1}{\nu}f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$
5. $f(qx)=qf(x)$ για κάθε για κάθε $q\in\mathbb{Q}$ με $q>0$
6. $f(qx)=qf(x)$ για κάθε για κάθε $q\in\mathbb{Q}$.
7. Με $\alpha=f(1)$ ισχύει $f(q)=\alpha q$ για κάθε $q\in\mathbb{Q}$.

Θα αποδείξουμε ότι

$$f(x)=\alpha x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad \text{όπου} \quad \alpha=f(1) \tag{1}$$

Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αν είναι γνησίως φθίνουσα παίρνουμε την $-f$ που και αυτή ικανοποιεί την υπόθεση). Αφού $0<1$ θα είναι $f(1)>0$.
Δείχνουμε πρώτα ότι *η f είναι συνεχής στο 0.* Θεωρούμε $\varepsilon>0$ και θεωρούμε ένα ρητό αριθμό q τέτοιο ώστε

$$0<q<\frac{\varepsilon}{\alpha}$$

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA

Φυσικά:

$$-\varepsilon < -\alpha q < 0 < \alpha q < \varepsilon$$

Αν πάρουμε x ώστε

$$-q < x < q$$

τότε λόγω της μονοτονίας της f είναι

$$f(-q) < f(x) < f(q)$$

δηλαδή

$$-\alpha q < f(x) < \alpha q$$

και επομένως

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$$

Συνοψίζοντας: Για κάθε x με $|x| < q$ ισχύει $|f(x)| < \varepsilon$ πράγμα που εξασφαλίζει ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ δηλαδή ότι η f είναι συνεχής στο 0. Η συνέχεια της f στο 0 εξασφαλίζει την συνέχεια στο τυχόν x_0 - πρόκειται για γνωστή άσκηση[2] - και επομένως *η f είναι συνεχής*.

Θα δείξουμε τώρα ότι ισχύει η (1). Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο x_0 η (1) δεν αληθεύει. Αυτό σημαίνει ότι ή συνεχής συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \alpha x$$

δεν μηδενίζεται στο x_0. Αρα κοντά στο x_0, ας πούμε σε ένα διάστημα (κ, λ) που περιέχει το x_0 η g θα έχει το πρόσημο του ορίου της στο x_0 δηλαδή του $g(x_0)$. Ιδιαιτέρως θα είναι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\kappa, \lambda)$. Όμως το διάστημα (κ, λ) θα περιέχει οπωσδήποτε κάποιον ρητό q και γιαυτόν θα είναι $g(q) = f(q) - \alpha q = \alpha q - aq = 0$ (άτοπο).

Παρατηρηση. Αν η f είναι μονότονη χωρίς να είναι γνησίως μονότονη για παράδειγμα αύξουσα χωρίς να είναι γνησίως αύξουσα τότε για κάποια $x_1 < x_2$ θα ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Αν ονομάσουμε $c = f(x_1)$ έχουμε ότι $f(x) = c$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Δηλαδή αν η συνάρτηση παίρνει ίσες τιμές στα άκρα ενός διαστήματος τότε είναι σταθερή σε αυτό το διάστημα. Τότε για κάθε ρητό q θα είναι

$$f(x_1 + q(x_2 - x_1)) = f(x_1) + q(f(x_2) - f(x_1)) = c$$

Αν x είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός τότε υπάρχουν ρητοί p, q ώστε:

$$x_1 + p(x_2 - x_1) < x < x_1 + q(x_2 - x_1)$$

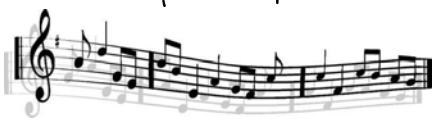
Πράγματι αρκεί οι ρητοί αυτοί να επιλεγούν ώστε:

$$p < \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} < q$$

Άρα θα πρέπει $f(x) = c$ σε κάθε x. Αλλά $f(0) = 0$. Άρα $f(x) = 0$ για όλα τα x

[2] $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0} (f(x_0) + f(h)) = \lim_{h\to 0} f(x_0) + \lim_{h\to 0} f(h) = f(x_0) + f(0) = f(x_0)$

Παραλλαγές



για παραγώγους και ολοκληρώματα

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

8 Μαΐου 2008

Περίληψη

Το σημείωμα αυτό γράφτηκε με αφορμή μία άσκηση που αναφέρεται στην διαφορική εξίσωση:

$$f''(x) + xf'(x) = f(x)$$

που τέθηκε στο δικτυακό τόπο Mathematica[1]. Όπου απαντάται μεταξύ ενός σημαντικού μέρους των ενεργών μελών μία κουλτούρα τελειοποίησης και με ένα είδος άγραφου κώδικα τιμής είθισται να διορθώνονται λάθη να βελτιώνονται αποτελέσματα, να μετατρέπονται σε πιό διδάξιμες οι ασκήσεις και άλλα πολλά που χαρακτηρίζουν την τέχνη του μαθηματικού-δασκάλου. Επίκεντρο είναι μία «σχολική» άσκηση που απλώνεται σαν κοντσέρτο. Άμιλλα και συνεργασία δηλαδή για την επίτευξη του στόχου. Η ιδέα να παρουσιάσω τις παραγράφους σαν μουσικά κομμάτια είναι κλεμμένη: Την είχα δεί σε ένα βιβλίο του Ribenboim πριν πολλά χρόνια,

1. Overture: Από alexx11
   Το μέλος alexx11 έδωσε χωρίς τη λύση της την άσκηση:

   Ασκηση 1. *Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ με $\alpha < \beta$ Αν $f(\alpha) = f(\alpha) = 0$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει ότι*

   $$f''(x) + xf'(x) = f(x)$$

   να δειχθεί ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β)

   Η άσκηση ακολουθεί μία διαδεδομένη πλέον πρακτική: Θέματα που λύνονται με Μαθηματικά πέρα από το Λύκειο περνάνε στο σχολείο ως δύσκολες φυσικά για τα παιδιά ασκήσεις. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε μία γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης δηλαδή την

   $$y'' + xy' - y = 0$$

   με αρχικές συνθήκες $y(\alpha) = y(\beta) = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει στο τέλος μία ιδιομορφία: Η γενική λύση της είναι

   $$y = C_1 x + C_2 x \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA

που μας οδηγεί στην εξής οικογένεια λύσεσων:

$$f(x) = Ax + Be^{-\frac{1}{2}x^2} + B\sqrt{2}x\int_0^x e^{-t^2}dt$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι η συνάρτηση f δε μπορει να εκφρασθεί με την βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων διότι τότε θα μπορούσε και η $\int_0^x e^{-t^2}dt$ που ως γνωστόν δε μπορεί.

2. ALLEGRO: Αργύρης Γαμβρέλλης
Έστειλε την ακόλουθη λύση για την Άσκηση 1:
Αν η f δεν μηδενίζεται στο (α,β), τότε διατηρεί πρόσημο ως συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) > 0$, οπότε έχουμε

$$f''(x) + xf'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{2}}f''(x) + xe^{\frac{x^2}{2}}f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[e^{\frac{x^2}{2}}f'(x)\right]' > 0$$

για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$

Δηλαδή η συνάρτηση $g(x) = e^{\frac{x^2}{2}}f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$. Από Θεώρημα Rolle για την f στο $[\alpha,\beta]$ υπάρχει ξ στο (α,β) ώστε $f'(\xi) = 0$. Τότε και $g(\xi) = 0$ οπότε για $\alpha < \xi < \beta$ ισχύει

$$g(x) < g(\xi) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\xi]$, άτοπο αφού υποθέσαμε πως $f(x) > 0 = f(\alpha)$.

Είναι $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ για εκείνες τις τιμές των A, B που είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} \alpha A + \left(e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} + \sqrt{2}\alpha\int_0^\alpha e^{-t^2}\,dt\right)B = 0 \\ \beta A + \left(e^{-\frac{1}{2}\beta^2} + \sqrt{2}\beta\int_0^\beta e^{-t^2}\,dt\right)B = 0 \end{array}\right\}$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι $\alpha r(\beta) - \beta r(\alpha)$ όπου

$$r(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} + \sqrt{2}x\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα αυτή θα είναι μηδέν αν και μόνο αν είναι $\frac{r(\alpha)}{\alpha} = \frac{r(\beta)}{\beta}$ πράγμα αδύνατον διότι με

$$s(x) = \frac{r(x)}{x}$$

βρίσκουμε

$$s'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^2}\left(-x^2 + \sqrt{2}x^2e^{-\frac{1}{2}x^2} - 1\right)$$

Επομένως η συνάρτηση της άσκησης (1) πρέπει να είναι μηδενική. Αυτό στο Mathematica δεν πέρασε απαρατήρητο.

3. ANDANTE: Μπάμπης Στεργίου
Επαναδιατύπωσε την άσκηση με την ακόλουθη μορφή:

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $0 < \alpha < \beta$, $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και*

$$f''(x) + xf'(x) = f(x) \quad \textit{για κάθε } x \textit{ στο } [\alpha,\beta]$$

να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε x στο (α,β).

4. MINUETTO 1: Αθανάσιος Μπελήγιαννης
   Βελτιώνει μία αρχική διατύπωση στην άσκηση 2

5. MINUETTO 2: 7apostolis
   Επισημαίνει ένα ασθενές επιχείρημα σε λύση της 2

6. ADAGIO: Η λύση του Μπάμπη Στεργίου στην άσκηση 2
   Έχουμε $f''(x)+xf'(x)=f(x) \Leftrightarrow f''(x)=f(x)-xf'(x)$ οπότε η f παραγωγίζεται και τρίτη φορά. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε:

$$f'''(x)+xf''(x)=0 \Leftrightarrow (f''(x)e^{\frac{x^2}{2}})'=0 \Leftrightarrow f''(x)=ke^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1)$$

   Έχουμε επίσης:

$$f''(x)+xf'(x)=f(x) \Leftrightarrow f''(x)=f(x)-xf'(x) \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{x^2} = -\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)}{x^2} = -(\frac{f(x)}{x})' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\int_\alpha^x \frac{1}{t^2}f''(t)dt \Leftrightarrow f(x) = -x\int_\alpha^x \frac{1}{t^2}f''(t)dt$$

   διότι $f(\alpha)=0$. Άρα

$$f(x) = -kx\int_\alpha^x \frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad \text{για κάθε} x\in[\alpha,\beta] \quad (2)$$

   Επειδή $f(\beta)=0$, η τελευταία σχέση δίνει ότι $k=0$ (μια και η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι θετική και τα άκρα α,β είναι θετικοί και διαφορετικοί μεταξύ τους αριθμοί) και έτσι η (2) μας δίνει ότι :

$$f(x)=0, \quad \text{για κάθε} \quad x\in[\alpha,\beta]$$

7. ALEGRO: Η λύση του Μίλτου Παπαγρηγοράκη [2]στην άσκηση 2
   Η f παρουσιάζει στο $[\alpha,\beta]$ ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο, ένα από τα οποία τα παρουσιάζει σε εσωτερικό σημείο του $[\alpha,\beta]$. Έστω $\gamma\in(\alpha,\beta)$ θέση ολικού ακροτάτου τότε από το θεώρημα του Fermat είναι $f'(\gamma)=0$ οπότε και $f''(\gamma)=f(\gamma)$ έτσι:

   - Αν $f(\gamma)>0$ τότε $f''(\gamma)>0$ και το γ είναι θέση ελαχίστου άρα $f(x)\geq f(\gamma)$ που είναι άτοπο αφού $f(\alpha)<f(\gamma)$
   - Αν $f(\gamma)<0$ τότε $f''(\gamma)<0$ και το γ είναι θέση μεγίστου άρα $f(x)\leq f(\gamma)$ που είναι άτοπο αφού $f(\alpha)>f(\gamma)$

[2]Ο Μίλτος Παπαγρηγοράκης στη συνέχεια επεξέτεινε το συμπέρασμα και για εξισώσεις που στη θέση του x έχουν τυχούσα $g(x)$. Συγκεκριμένα έδωσε τη γενίκευση:
Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<\beta$και η συνάρτηση g ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, ισχύει ότι $f''(x)+g(x)f'(x)=f(x)$, να αποδείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.
ΛΥΣΗ: Η f παρουσιάζει στο $[\alpha,\beta]$ ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο, ένα από τα οποία τα παρουσιάζει σε εσωτερικό σημείο του $[\alpha,\beta]$ Έστω $\gamma\in(\alpha,\beta)$ θέση ολικού ακροτάτου τότε από θεώρημα του Fermat είναι $f'(\gamma)=0$ οπότε και $f''(\gamma)=f(\gamma)$, έτσι: Αν $f(\gamma)>0$ τότε $f''(\gamma)>0$ και το $f(\gamma)$ είναι θέση ελαχίστου άρα $f(x)\geq f(\gamma)$ που είναι άτοπο αφού $f(\alpha)<f(\gamma)$ Αν $f(\gamma)<0$ τότε $f''(\gamma)<0$ και το $f(\gamma)$ είναι θέση μεγίστου άρα $f(x)\leq f(\gamma)$που είναι άτοπο αφού $f(\alpha)>f(\gamma)$ Θα είναι λοιπόν $f(\gamma)=0$ Έτσι το ελάχιστο και το μέγιστο της f στο $[\alpha,\beta]$ είναι μηδέν επομένως είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Θα είναι λοιπόν $f(\gamma)=0$. Έτσι το ελάχιστο και το μέγιστο της f στο $[\alpha,\beta]$ είναι μηδέν επομένως είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

8. PRESTO: Μία παρατήρηση
   Η παρακάτω άσκηση προέκυψε από την προσπάθεια μου να αποδείξω ότι η f είναι 0 και κοιτώντας τις προηγούμενες λύσεις:

   ΑΣΚΗΣΗ 3. *Έστω f μία συνάρτηση που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, με θετική την δεύτερη παράγωγο και τέτοια ώστε κάθε ρίζα της f' να είναι και ρίζα της $f''-f$. Να αποδείξετε ότι η f έχει το πολύ μία ρίζα.*

   ΛΥΣΗ Ας πούμε ότι έχει δύο τις $\alpha<\beta$. Η γνησίως αύξουσα f' από το θεώρημα του Rolle έχει τουλάχιστον μία ρίζα ρ στο (α,β) η οποία λόγω μονοτονίας είναι μοναδική. Η f' θα είναι αρνητική στο $(\alpha,\rho))$ και θετική στο (ρ,β). Άρα η f θα έχει ελάχιστο στο ρ και φυσικά $f(\rho)<0$. Τότε όμως $f'(\rho)=0$ και συνεπώς και $f''(\rho)-f(\rho)=0$ δηλαδή $f"(\rho)=f(\rho)<0$ (άτοπο).

   Με την βοήθεια της άσκησης 3 μπορούμε να προχωρήσουμε κάπως διαφορετικά την απόδειξη του Μπάμπη Στεργίου και να έχουμε μία ακόμη λύση στην άσκηση 2: Στην την σχέση $f''(x)=ke^{-\frac{x^2}{2}}$ παρατηρούμε ότι αν $k=0$ καλώς διότι τότε $f'=c$ και $f(x)=cx+d$ και αφού η f έχει δύο ρίζες είναι $f=0$. Αν k διάφορο του 0 υποθέτουμε ότι $k>0$ (αλλιώς δουλεύουμε με την $-f$) οπότε έχουμε μία συνάρτηση με θετική δεύτερη παράγωγο και τέτοια ώστε κάθε ρίζα της f' είναι και ρίζα της $f''-f$ και από την άσκηση 3 η f έχει το πολύ μία ρίζα (άτοπο διότι έχει δύο)

9. FINALE: Μία μία πληροφορία alexx11
   Η άσκηση δόθηκε, κάπου, σε επαναληπτικό διαγώνισμα!!! [3]

[3] Και ένα σχόλιο από τον Μίλτο Παπαγρηγοράκη:
ΣΧΟΛΙΟ: Ίσως πιο κατάλληλη για τους μαθητές θα ήταν η άσκηση με μια διατύπωση της μορφής: Δίνεται συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<\beta$. Αν ισχύει ότι $\left(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right)f'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Ποπ-Κορν

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

29 Αυγούστου 2008

Περίληψη

Στον δικτυακό τόπο Mathematica [1] συζητήθηκε η τροποποιημένη συνάρτηση του Dirichlet που είναι γνωστή και ως συνάρτηση του Thomae αλλά και ως συνάρτηση του ποπ-κορν. Στο παρόν σημείωμα περιέχεται η προσέγγιση [2] μου σε κάποια ερωτήματα που ετέθησαν στο Mathematica

Ασκηση 1. *(Χρήστος Κυριαζής[3] , dement[4]) Έστω η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x \in \mathbb{Q},\ \ x = \frac{p}{q},\ \frac{p}{q}\ \textit{ανάγωγο},\quad q > 0 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. *Να βρείτε όλα τα σημεία τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της* f.
2. *Βρειτε τα σημεια στα οποια η* f *ειναι συνεχης καθως και σε ποια απο αυτα ειναι παραγωγισιμη.*
3. *Αποδειξτε οτι η* f *ειναι ολοκληρώσιμη σε καθε κλειστο διαστημα, με ολοκληρωμα 0.*

Αποδειξη

Ερωτημα 1 [5] Ελάχιστο προφανώς το 0 που πραγματοποιείται σε κάθε άρρητο. Για τα τοπικά μέγιστα: Εστω ένα διάστημα (α, β) και ν θετικός ακέραιος. Τότε το κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$) ανήκει στο (α, β) αν και μόνο αν $\nu\alpha < \mu < \nu\beta$. Αλλά υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος ακέραιοι που ανήκουν στο διάστημα $\nu\alpha < \mu < \nu\beta$ (το πολύ $[\nu\alpha, \nu\beta - \nu\alpha] - 1$. Άρα το (α, β) περιέχει πεπερασμένο πλήθος κλασμάτων με παρονομαστή ν. Έστω τώρα ρητός $\frac{p}{q}$ σε ανηγμένη μορφή. Έστω διάστημα (α, β) που περιέχει τον $\frac{p}{q}$. Το (α, β) περιέχει πεπερασμένα το πλήθος ανηγμένα κλάσματα με παρονομαστή 1, πεπερασμένα με παρονομαστή 2, ..., πεπερασμένα με παρονομαστή $q-1$. Τα κλάσματα αυτα είναι διάφορα του $\frac{p}{q}$ αφού έχουν μικρότερο παρονομαστή. Θεωρούμε το σύνολο που απαρτίζουν όλα αυτά τα κλάσματα. Θα

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/1063887?read=583&forum=75223

[2] Με την άσκηση αυτή απασχολήθηκα λίαν ευχαρίστως την νύχτα της 22ας προς 23η Αυγούστου 2008 στο F/B LATO ταξιδεύοντας από τα Χανιά στον Πειραιά. Και όπως συμβαίνει συχνά στο Mathematica υπήρξε η αφορμή για να δω μετά διάφορα και από διάφορες πηγές

[3] Έθεσε το πρώτο ερώτημα που, όπως σημείωσε, προέρχεται από το βιβλίο «Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός» του Spivak

[4] Έθεσε τα υπόλοιπα ερωτήματα

[5] Ο Κώνσταντίνος Μιχαηλίδης michailk σημείωσε ότι μια διαισθητικη απάντηση είναι οτι κάθε x άρρητος είναι σημείο τοπικού ελαχίστου ενώ κάθε x ρητός είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

είναι πεπερσμένο. Έστω $\{x_1, ..., x_\mu\}$ με $\alpha < x_1 < x_2 < ... < x_\mu < \beta$ Το $\frac{p}{q}$ ανήκει σε κάποιο διάστημα από τα $(\alpha, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_\mu, \beta)$. Ας το πούμε Δ. Όλοι οι ρητοί με που περιέχονται στο Δ στην ανηγμένη μορφή τους έχουν παρονομαστή έχουν παρονομαστή μεγαλύτερο ή ίσο του q. Άρα και η τιμές που παίρνει η f στο Δ είναι μικρότερε ή ίσες του $\frac{1}{q}$. Και επειδή $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ έχουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\frac{p}{q}$.

Ερωτημα 2 Ο Χρήστος Κυριαζής παρέθεσε την εξής απόδειξη για την συνέχεια: Έστω ρ ρητός και η (x_ν) μια ακολουθία αρρήτων όρων τέτοια ώστε $\lim x_\nu = \rho$. Τότε (ορισμός σύγκλισης κατά (Heine) και $\lim f(x_\nu) = \rho$. Όμως $f(\rho) = 0$. Άρα η f ασυνεχής στο ρ, άρα ασυνεχής σε κάθε ρητό. Έστω α άρρητος αριθμός και έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει φυσικός ν_0, τετοιός ώστε

$$\nu_0 > \frac{1}{\varepsilon} \text{ ή } \frac{1}{\nu_0} < \varepsilon$$

από το αξίωμα του Αρχιμήδη. Έστω τώρα το διάστημα $(\alpha - 1, \alpha + 1)$. Είναι γνωστό ότι στο $(\alpha - 1, \alpha + 1)$ υπάρχει μόνο ενα πεπερασμένο πλήθος ρητών με παρονομαστή μικρότερο του ν_0 (γιατι το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο). Συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$, ώστε, στο διάστημα $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ να περιέχεται στο $(\alpha - 1, \alpha + 1)$ και να μην περιέχει ρητούς με παρονομαστή μικρότερο του ν_0. Τότε για $|x - \alpha| < \delta$, έχουμε $|f(x) - f(\alpha)| = |f(x)| \leq \frac{1}{\nu_0} < \varepsilon$. Άρα η f είναι συνεχής στον α και επομέμως σε κάθε άρρητο.

Η συνέχεια αλλιώς: Έστω t. Θεωρούμε $\epsilon > 0$. Υπάρχει φυσικός ν ώστε $\frac{1}{\nu} < \epsilon$. Εργαζόμενοι όπως πριν μπορούμε να βρούμε διάστηματα (α, t), (t, β) που δεν περιέχουν κλάσματα σε ανηγμένη μορφή με παρονομαστή μικρότερο του ν. Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές της f στην ένωση των (α, t), $(t, \beta))$ είναι μικρότερες ή ίσες του $\frac{1}{\nu}$ άρα και του ϵ. Επομένως το όριο της f στο τυχόν t είναι 0. Άρα η f είναι συνεχής μόνο στα σημεία όπου και η τιμή της είναι 0 δηλαδή είναι συνεχής στους άρρητους και ασυνεχής στους ρητούς.

Η Παραγωγισιμότητα. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 1 επομένως μπορούμε να περιοριστούμε στο $[0, 1)$. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στους ρητούς διότι εκεί είναι ασυνεχής. Θα δείξουμε ότι δεν παραγωγίζεται και στους άρρητους. Έστω α ένας άρρητος. Αν f παραγωγίζεται στο α θα πρέπει από το θεώρημα του Fermat παράγωγος να είναι 0. Είναι γνωστό ότι υπάρχουν άπειροι διακεκριμένοι ρητοί $\frac{p}{q}$ (με $\frac{p}{q}$ όχι κατ΄ ανάγκην ανάγωγα) ώστε

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2} \quad (*)$$

Αναγκαστικά οι παρονομαστές q αυτών των ρητών είναι άπειροι το πληθος (αλλιώς θα έπρεπε ένα κλάσμα να εμφανιζόταν με τον ίδιο παρονομαστή άπειρες φορές και θα υπήρχε τέτοιο κλάσμα που απέχει από το α απόσταση πάνω από 2 (άτοπο). Επιλέγοντας μία αύξουσα ακολουθία παρονομαστών (q_n) συνάγουμε ότι υπάρχει ακολουθία ρητών $\frac{p_n}{q_n}$ που συγκλίνει στο α και ικανοποιεί την (*). Τότε

$$\frac{f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) - f(\alpha)}{\frac{p_n}{q_n} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{p_n}{q_n}\right)}{\frac{p_n}{q_n} - \alpha}$$

Η απόλυτη τιμή του λόγου μεταβολής στα $\frac{p_n}{q_n}$,α είναι $\frac{\left|f\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|}{\left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right|} > \frac{f\left(\frac{p_n}{q_n}\right)}{q_n^2} > 1$ διότι το $f\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ είναι $\frac{1}{q_n}$ ή μεγαλύτερο. Άρα ο λόγος μεταβολής της f στα $\frac{p_n}{q_n}$, α δε

μπορεί να τείνει στο 0 κάτι πού έπρεπε να συμβαίνει αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο α. Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη ούτε στους άρρητους.

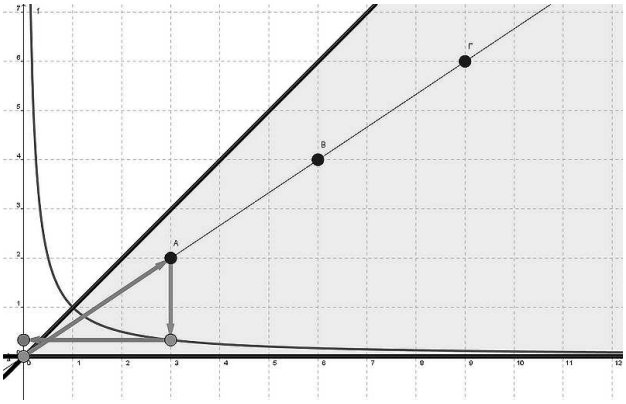
Ερωτημα 3 *Ολοκληρωσιμότητα.* Θεωρούμε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Το σύνολο A των σημείων ασυνεχείας της f στο $[\alpha, \beta]$ είναι το σύνολο των ρητών σημείων του $[\alpha, \beta]$ που είναι αριθμήσιμο άρα μετρήσιμο με μέτρο 0. Ας ονομάσουμε B το συμπλήρωμα του A στο [α,β]. Φυσικά και αυτό είναι μετρήσιμο. Επειδή το σύνολο των σημείων ασυνεχείας της f έχει μέτρο 0 η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη. Ιδιαιτέρως είναι και Lebesgue-ολοκληρώσιμη και τα δύο ολοκληρώματα της συμπίπτουν. Τώρα αν με τον συμβολισμό $\int_X f$ δηλώσουμε το Lebesgue-ολοκλήρωμα της f στο Q έχουμε $\int_{[\alpha,\beta]} f = \int_A f + \int_B f$ διότι τα A, B ειναι ξένα μετρήσιμα με ένωση το $[\alpha, \beta]$. Είναι όμως $\int_A f = 0$, $\int_B f = 0$. Η πρώτη ισότητα ισχύει διότι το A έχει μέτρο 0 και η δεύτερη διότι η f στο B είναι 0. Άρα $\int_{[\alpha,\beta]} f = 0$ οπότε και το Riemann-ολοκλήρωμα της f είναι 0.

Ενας τροπος για να «δουμε» την συναρτηση f

Όπως σημειώθηκε η f είναι περιοδική με με περίοδο 1. Πράγματι

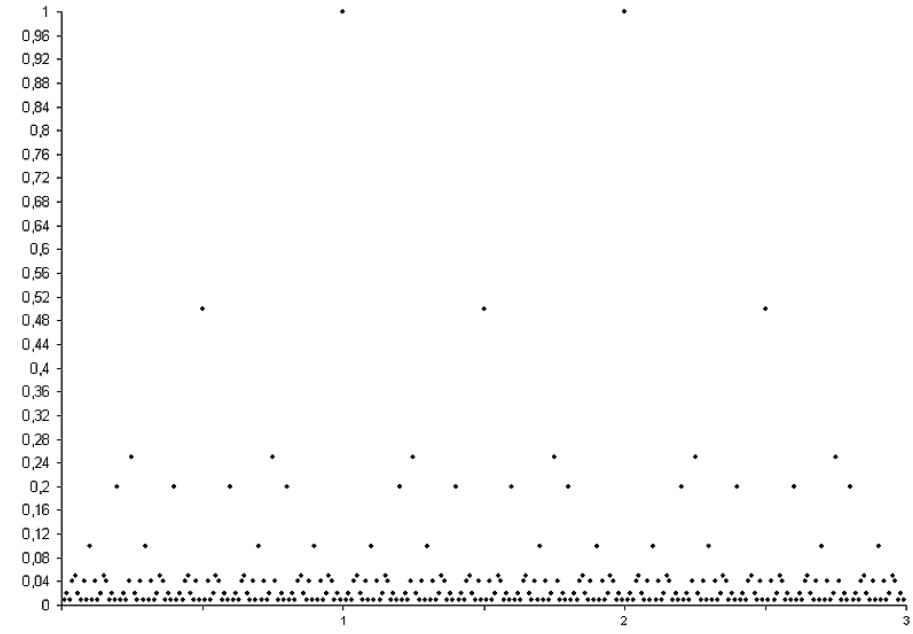
$$f(x+1) = f(x) \ \ (*)$$

Για x άρρητο και τα δύο μέλη της είναι 0 αφού και ο $x+1$ είναι άρρητος. Για $x = \frac{p}{q}$ σε ανηγμένη μορφή είναι $x+1 = \frac{p+q}{q}$ που και αυτό είναι ανάγωγο. Στην περίπτωση αυτή και τα δύο μέλη της (*) είναι $\frac{1}{q}$. Άρα αρκεί να δούμε την συνάρτηση στο $[0, 1)$. Χρησιμοποιούμε ένα σύστημα αξόνων και την ανεξάρτητη μεταβλητή της f, ας την πούμε εδώ t για να μην μπλέξουμε την φανταταζόμαστε σαν κλίση. Στο t από το $[0, 1)$ αντιστοιχούμε την ημιευθεία $y = tx, x > 0$. Αν αυτή δεν συναντήσει κάνένα συνδεσμικό σημείο (=σημείο με ακέραιες συντεταγμένες) εκτός της αρχής των αξόνων, και αυτό συμβαίνει όταν η κλίση είναι αριθμός άρρητος, τότε η τιμή της συνάρτησης είναι 0. Αν συναντήσει (και θα συναντήσει άπειρα) πράγμα που θα συμβεί όταν ο t είναι ρητός τότε διαλέγουμε εκείνο που είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων (στο σχήμα μας το A). Οι συντεταγμένες του δίνουν την ανηγμένη μορφή του t. Βρίσκουμε την τετμημένη αυτού του σημείου, την εισάγουμε στην $g(x) = \frac{1}{x}$ και βρίσκουμε το $f(t)$. Μοιάζει με φλιπεράκι:

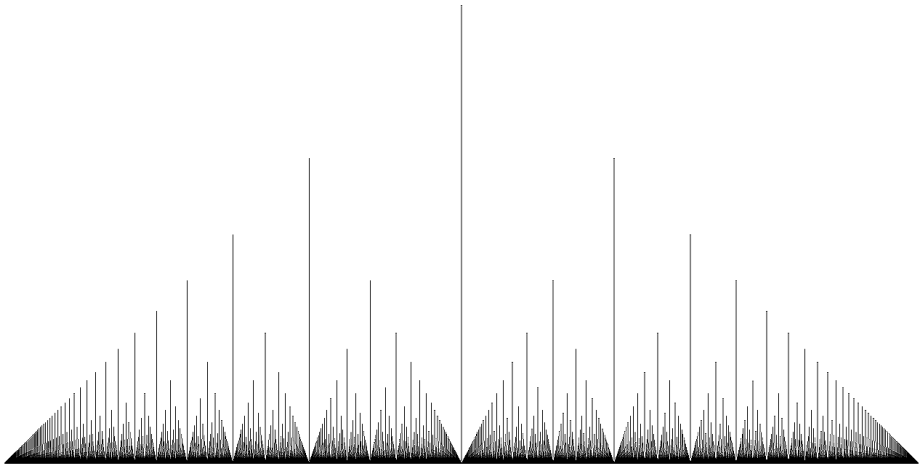


Η γραφικη παρασταση της f

Είναι αντιληπτό ότι η f είναι αρκετά παθολογική συνάρτηση αφού στους άρρητους «βυθίζεται» στο 0. Όπως είδαμε αρκεί η γνώση της γραφικής παράστασης της f στο μοναδιαίο διάστημα. Η γραφική της παράσταση είναι:



Ενώ με ράβδους έχουμε καλλίτερη εικόνα



Όπως διαπίστωσα αργότερα η συνάρτηση συτή είναι γνωστή με διάφορα ονόματα: Συνάρτηση του Dirichlet, Συνάρτηση του Thomae ή Συνάρτηση Pop Corn!

Συναρτήσεις με μηδενική παράγωγο

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

8 Μαΐου 2008

Περίληψη

Αποδεικνύεται, με σχολικά μέσα, ότι μία συνάρτηση που σε ένα διάστημα έχει μη μηδενική παράγωγο είναι γνησίως μονότονη σε αυτό παρακάμπτοντας το θέωρημα του Darboux. Αφορμή υπήρξε μία συζήτηση στο δικτυακό τόπο Mathematica

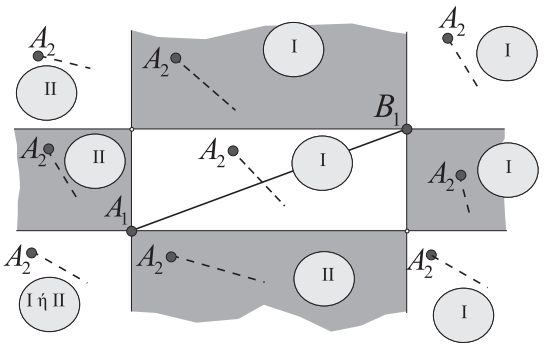
Πρόταση 1. *Αν η παράγωγος μίας συνάρτησης f δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του διαστήματος Δ τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ*

Απόδειξη Σε κάθε κλειστό υποδιάστημα I του Δ η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Όμως αποκλείεται να ισχύει κάποια από τις συνθήκες:

I Η τιμή της f σε κάποιο εσωτερικό σημείο του I είναι μεγαλύτερη από τις τιμές της στα άκρα του I

II Η τιμή της f σε κάποιο εσωτερικό σημείο του I είναι μικρότερη από τις τιμές της στα άκρα του I

διότι τότε η μέγιστη (ή ελάχιστη τιμή) της f στο I θα ήταν σε εσωτερικό σημείο και εκεί θα είχαμε μηδενισμό της παραγώγου. Επίσης από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι η f είναι 1-1. Ας πούμε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη. Θα καταλήξουμε σε άτοπο αποδεικνύοντας ότι αναγκαστικά θα ισχύει κάποια από τις **I**, **II**. Αφού η f δεν είναι μονότονη θα υπάρχουν $\alpha_1 < \beta_1$ και $\alpha_2 < \beta_2$ στο Δ ώστε να είναι $f(\alpha_1) < f(\beta_1)$ και $f(\alpha_2) > f(\beta_2)$. Θεωρούμε τα σημεία $A_1(\alpha_1, f(\alpha_1))$, $A_2(\alpha_2, f(\alpha_2))$, $B_1(\beta_1, f(\beta_1))$, $B_2(\beta_2, f(\beta_2))$. Το τμήμα A_1B_1 θα έχει θετική κλίση ενώ το A_2B_2 αρνητική. Ας ασχοληθούμε με το A_1B_1. Θεωρούμε τις 4 παράλληλες από τα άκρα του A_1B_1 προς τους άξονες. Επειδή έχουμε συνάρτηση η οποία είναι 1-1 το A_1 δε μπορεί να ανήκει σε καμμία από τις 4 παράλληλες αλλά θα ανήκει σε κάποια από τις 9 περιοχές που ορίζουν. Όμως τότε σε κάθε περίπτωση θα ισχύει κάποια από **I**, **II** όπως φαίνεται στο σχήμα:



Χορδή με Ρητό Μήκος

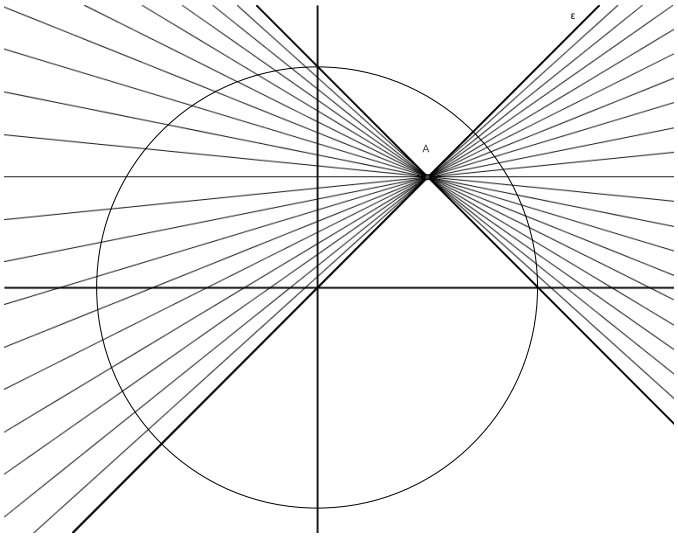
Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

14 Δεκεμβρίου 2008

Ασκηση 1. *(Μπάμπης Στεργίου)*[1] *Να αποδειχθεί ότι από τυχαίο σημείο A εντός κύκλου, εκτός του κέντρου, μπορούμε να φέρουμε χορδή που έχει μήκος ρητό αριθμό.*

Λυση 1 (antonis_math) Αρκούν δυο διαφορετικές σε μήκος χορδές για το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, και να πούμε πως ανάμεσα στους δυο αριθμούς θα υπάρχει και ένας ρητός. Είναι εμφανές πως το μήκος μεταβάλεται κατα συνεχή τρόπο, αφού και η χορδή μεταβάλεται κατα συνεχή τρόπο. (αν φανταστούμε τη στροφή της χορδής). Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε:

- Να θεωρήσουμε ότι ο κύκλος είναι ο μοναδιαίος $x^2 + y^2 = 1$
- Το σημείο μας είναι πάνω στην $y = x$ δηλαδή είναι κάποιο σημείο της μορφής $A(\mu, \mu)$.



Τότε η μεταβλητή (ως προς) ευθεία λ,

$$(\varepsilon) : y = \lambda x + \mu(1 - \lambda), \quad 1 \leq \lambda \leq 1$$

είναι ο φορέας μεταβλητής χορδής που διέρχεται από το A. Για $\lambda = -1$ έχω τον φορέα της κάθετης στη διάμετρο χορδής, δηλαδή την ελάχιστη σε μήκος χορδή, και

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/17063?read=805&forum=56996

για $\lambda = 1$ τον φορέα της μέγιστης χορδής αφού την επαληθεύει το κέντρο $(0, 0)$ και επομένως είναι διάμετρος. Λύνοντας το σύστημα της ε με τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, βρίσκουμε τα άκρα της χορδής. Πάιρνοντας το μήκος θα έχουμε συνάρτηση του λ. Τέλος εφαρμόζουμε σε αυτή τη συνάρτηση το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, η οποία είναι συνεχής ώς προς λ.

ΛΥΣΗ 2 Ας πούμε ότι ο κύκλος είναι ο C, έχει ακτίνα μήκους R, και ότι το A απέχει από το κέντρο του απόσταση d. Έστω m θετικός με

$$m^2 = R^2 - d^2 \tag{1}$$

Έστω

$$x \in (2m, 2R) \tag{2}$$

Έστω r θετικός με

$$x^2 - r^2 = m^2 \tag{3}$$

Προφανώς $x > r$ και

$$\frac{x}{2} - \frac{r}{2} < R + d \tag{4}$$

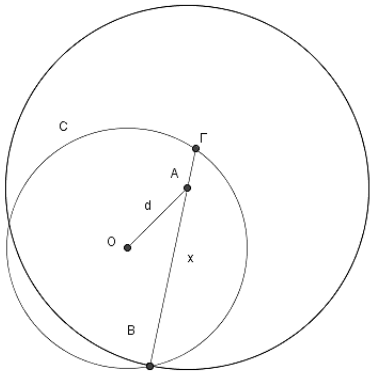
πολλαπλασιάζοντας την (4) επί $\frac{x}{2} + \frac{r}{2}$ και αξιοποιώντας τις (1), (2) βρίσκουμε ότι

$$R^2 - d^2 < \left(\frac{x}{2} + \frac{r}{2}\right)(R + d)$$

που μας δίνει ότι $R - d < \frac{x}{2} + \frac{r}{2}$. Άρα ισχύει (η δεύτερη ανισότητα είναι άμεση)

$$R - \left(\frac{x}{2} + \frac{r}{2}\right) < d < R + \left(\frac{x}{2} + \frac{r}{2}\right) \tag{5}$$

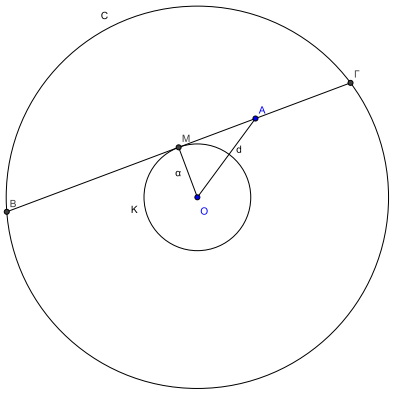
Η (5) μας λέει ότι ο κύκλος με κέντρο A και ακτίνα $\rho = \frac{x}{2} + \frac{r}{2}$ τέμνει τον C σε δύο σημεία. Έστω B ένα από αυτά.



Η AB επανατέμνει τον κύκλο σε κάποιο Γ και αφού $AB \cdot A\Gamma = R^2 - d^2 = m^2$ θα είναι $AB = \frac{x}{2} + \frac{r}{2}$ και $A\Gamma = \frac{x}{2} - \frac{r}{2}$. Επομένως η χορδή $B\Gamma$ έχει μήκος x. Αλλά η επιλογή (2) μπορεί να γίνει ώστε ο x να είναι ρητός και τότε πετυχαίνουμε η χορδή $B\Gamma$ να έχει ρητό μήκος.

ΛΥΣΗ 3 (Ο συμβολισμός είναι ίδιος με της λύσης 2). Επιλέγουμε ρητό q από

το διάστημα $(0, \sqrt{R^2 - d^2})$. Θεωρούμε θετικό α με $\alpha^2 = R^2 - q^2$. Είναι $\alpha < d$. Θεωρούμε θετικό x ώστε $(\frac{x}{2})^2 = R^2 - \alpha^2$. Φυσικά $\frac{x}{2} = q$ =ρητός. Κάθε χορδή που εφάπτεται στον κύκλο K με κέντρο το κέντρο του C και ακτίνα α έχει απόστημα α και μήκος τον ρητό x. Για να βρούμε την ζητούμενη χορδή αρκεί από το M να φέρουμε εφαπτομένη στον K.



Μία με Ομοιόμορφη Σύγκλιση

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

17 Αυγούστου 2008

Ασκηση 1. *(από τον stelmarg7) Δίνεται ακολουθία συναρτήσεων f_n και μια συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του $[\alpha, \beta]$ που συγκλίνει στο x η ακολουθία τότε $f_n(x_n)$ συγκλίνει στο $f(x)$. Δείξτε ότι η f_n σύγκλίνει ομοιόμορφα στην f.*

Αποδειξη

Για να αποδείξουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων f_n συγκλίνει στη συνάρτηση f ομοιόμορφα πρέπει να αποδείξουμε ότι Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε η σχέση

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

να ισχύει για όλα τα $n > n_0$και για όλα τα x. Άς υποθέσουμε ότι αυτό δεν αληθεύει. Τότε θα υπάρχει κάποιος $\epsilon > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε n_0 να υπάρχει κάποιος $n > n_0$και κάποιος x ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$$

Σε κάθε m αντιστοιχώ ένα φυσικό αριθμό $k_m > m$ και ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού της f έστω x_{k_m} ώστε

$$|f_{k_m}(x_{k_m}) - f(x_{k_m})| \geq \epsilon$$

Οι όροι της ακολουθίας x_{k_m} περιέχονται σε κλειστό διάστημα και επομένως από το θεώρημα Weierstrass-Bolzano θα έχει μία υπακολουθία συγκλίνουσα σε κάποιο σημείο του διαστήματος. Ας την πούμε x_{r_m} και ας πούμε x το όριο της. Τότε για όλα τα m θα έχω

$$|f_{r_m}(x_{r_m}) - f(x_{r_m})| \geq \epsilon \quad (*)$$

Αλλά λόγω συνεχείας της f θα πρέπει για αρκετά μεγάλο m να ισχύει

$$|f(x_{r_m}) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Αλλά και από την υπόθεση έχουμε ότι πάλι για αρκετά μεγάλο m ότι θα ισχύει:

$$|frm(x_{r_m}) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Άρα για αρκετά μεγάλο m (δηλαδή για $m > m_0$ όπου m_0 κατάλληλος) θα είναι

$$|f_{r_m}(x_{r_m}) - f(x_{r_m})| \leq |f(x_{r_m}) - f(x)| + |f_{r_m}(x_{r_m}) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

δηλαδή θα υπάρχει κάποιος m για τον οποίο:

$$|f_{r_m}(x_{r_m}) - f(x_{r_m})| < \epsilon \quad (**)$$

κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την (*).

Τρεις Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

20 Αυγούστου 2008

Ασκηση 1. *(Από xstavros)* [1] *1) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο μιας προβολής. 2) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο ενός ενελικτικού γραμμικού μετασχηματισμού. 3) Δείξτε ότι η ορίζουσα ενός γραμμικού μετασχηματισμού είναι ίση με το σταθερό όρο του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του.*

Λυση

1) Έστω V ενας διανυσματικός χώρος. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός P του V λέγεται προβολή αν $P^2 = P$. Ας υποθέσουμε ότι ο μετασχηματισμός μας δεν είναι τετριμμένος δηλαδή δεν είναι ούτε ο μηδενικός ούτε ο ταυτοτικός. Αν ο P έχει εικόνα $\mathrm{Im}P = W$ και πυρήνα $\mathrm{Ker}P = U$ τότε $V = W \oplus U$. Αρα αν πάρουμε μία βάση του W και μία βάση του U τα διανύσματα τους φτιάχνουν μία βάση του V. Επειδή $P(w) = w, P(u) = 0$ για όλα τα $w \in W, u \in V$ προς αυτή τη βάση ο P θα έχει πίνακα της μορφής

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}$$

όπου οι πίνακες στην διαγώνιο είναι μοναδιαίοι τάξης $m = \dim W, r = \dim U$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μετασχηματισμού μας θα είναι:

$$f(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} I_m - xI_m & 0 \\ 0 & I_r - xI_r \end{vmatrix} = |I_m - xI_m| \cdot |I_r - xI| = (1-x)^m x^r$$

Αλλος Τροπος: Είναι $P^2 - P = 0$ και επομένως ο μετασχηματισμός μας μηδενίζει το πολυώνυμο $x^2 - x$. Επειδή κάθε πολυώνυμο που μηδενίζεται από τον μετασχηματισμό θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του ελαχίστου πολυωνύμου του μετασχηματισμού το ελάχιστο πολυώνυμο θα είναι κάποιο από τα $x,\ x-1, x(x-1)$

Αν είναι το πρώτο έχουμε μηδενικό μετασχηματισμό, αν είναι το δεύτερο έχουμε τον ταυτοτικό. Αν ο μετασχηματισμός δεν είναι τετριμμένος απομένει η τρίτη περίπτωση για το ελάχιστο πολυώνυμο. Ξέρουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει παράγοντα το ελάχιστο πολυώνυμο και θα έχει τους ίδιους πρώτους παράγοντες με αυτό. Επομένως κατ΄ αρχήν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι της μορφής $x^t (x-1)^s$ Οι εκθέτες μπορούν να υπολογισθούν. Σύμφωνα με το γενικευμένο θεώρημα Cayley-Hamilton κάθε εκθέτης είναι ίσος με τη μηδενικότητα (=διάσταση του πυρήνα) του μετασχηματισμού που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τονP σε κάθε πρώτο παράγοντα του ελαχίστου πολυωνύμου και

[1] http://cluvs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/17063;read=124&forum=75326

διαιρέσουμε δια της πολλαπλότητας με την οποία εμφανίζεται ο παράγοντας αυτός στο ελάχιστο πολυώνυμο. Εδώ

$$t = \frac{\dim \ker P}{1}, s = \frac{\dim \ker (P - I)}{1}$$

Με τον συμβολισμό του α΄ τρόπου έχουμε

$$\dim \ker P = \dim U = r, \ \ \dim \ker (P - I) = \dim W = m$$

που μας οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα.
2) Εργαζόμαστε όπως στον β΄ τρόπο της 1). Μία ενέλιξη T ικανοποιεί την $T^2 = I$.
3) Αρκεί να θυμηθούμε ότι ο σταθερός όρος ενός πολυωνύμου είναι η αριθμητική τιμή του στο 0. Ετσι

$$\textit{σταθερός όρος χαρακτηριστικού πολυωνύμου} = f(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$$

Μία με Διαγωνιοποιήσιμο Πίνακα

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

19 Αυγούστου 2008

ΑΣΚΗΣΗ 1. *(Από xstavros)* [1] *Δείξτε ότι αν ο πίνακας ενός γραμμικού μετασχηματισμού T ως προς την βάση $u_1, u_2, ..., u_n$ μετατίθεται με όλους τους διαγωνοποιήσιμους πίνακες, τότε είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε ένα διαγώνιο πίνακα $Q = (x_i j)$ που έχει όλα τα στοιχεία

$$c_1, c_2, ..., c_n \quad (*)$$

της κυρίας διαγωνίου του διακεκριμένα (= ανά δύο διάφορα). Φυσικά ο Q είναι διαγωνιοποιήσιμος και επομένως θα αντιμετατίθεται με τον T δηλαδή

$$QT = TQ \quad (1)$$

Ας πούμε ότι $T = (t_{ij})$, $X = (x_{ij})$. Τότε $QT = (a_{ij})$ $TX = (b_{ij})$ με

$$a_{ij} = \sum x_{ik} t_{kj} = c_i t_{ij}$$

$$b_{ij} = \sum t_{ik} x_{kj} = t_{ij} c_j$$

και λόγω της (1) είναι: $c_i t_{ij} = t_{ij} c_j$ δηλαδή

$$(c_i - c_j) t_{ij} = 0$$

άρα αν τα i, j είναι διάφορα θα πρέπει $t_{ij} = 0$. Συνεπώς ο T είναι διαγώνιος. Ας πούμε ότι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του είναι $d_1, d_2, ..., d_n$. Από τον πίνακα X κατασκευάζουμε ένα πίνακα Y ως εξής
1) Κατω από την διαγώνιο του Q κρατάμε τα μηδενικά.
2) Κρατάμε τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του Q.
3) Συμπληρώνουμε τα μηδενικά που υπάρχουν στον Q πάνω από την διαγωνιο μη μηδενικούς αριθμούς.
Ο πίνακας Y θα είναι πάλι διαγωνιοποιήσιμος διότι οι ιδιοτιμές του είναι οι (*) και επομένως τα n ιδιοδιανύσματα που ανήκουν σε αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα άρα αποτελούν βάση του χώρου. Ο T θα αντιμετατίθεται με τον $Y = (y_{ij})$ οπότε εφαρμόζοντας το προηγούμενο επιχείρημα έχουμε ότι

$$(d_i - d_j) y_{ij} = 0$$

Αλλά με $j > i$ είναι y_{ij} διάφορο του μηδενός. Άρα $d_i = d_j$. Αρα ο T είναι διαγώνιος με όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του ίσα. Άρα είναι πολλαπλάσιο του μοναδιαίου πίνακα.

[1] http://clubs.patheindep.gr/MATHEMATICA/17063;forum=75326&read=127

Άσκηση στη Γραμμική Άλγεβρα (Από το μέλος spinoss)
Δείξτε αν ένας 2x2 πίνακας A που έχει trA=0 γράφεται A=BC-CB

Λύση (Ν. Σ. Μαυρογιάννης) Στη λύση που είμαι σίγουρος ότι μπορεί να συντομευθεί, χρησιμοποιήθηκαν ιδέες από το σημείωμα του καθηγητή W. Kahan: Only Commutators Have Trace Zero
(http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/MathH110/trace0.pdf)
Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει γενικά για τετραγωνικούς πίνακες και αποδείχθηκε για πρώτη φορά το 1936 από τον Ιάπωνα Shoda.

Η ιδέα της απόδειξης είναι να μετασχηματίσουμε κατάλληλα τον πίνακα με μετασχηματισμούς που διατηρούν το ίχνος και να τον φέρουμε σε κατάλληλη μορφή που γράφεται σαν διαφορά $XY - YX$.

Ισχυρισμός 1 Οι πίνακες $T^{-1}AT, T$ έχουν το ίδιο ίχνος.

Απόδειξη του ισχυρισμού 1: Γνωρίζουμε ότι γενικά οι πίνακες $XY,\ YX$ έχουν το ίδιο ίχνος. 'Αρα

$$tr(T^{-1}AT) = tr(ATT^{-1}) = tr(A)$$

Ισχυρισμός 2 Κάθε πίνακας που έχει τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ίσα με 0 μπορεί να πάρει τη μορφή $XY - YX$.

Απόδειξη του ισχυρισμού 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Ισχυρισμός 3 Αν ο πίνακας $T^{-1}AT$ γράφεται στη μορφή $XY - YX$ τότε και ο A γράφεται στη μορφή $BC - CB$.

Απόδειξη του ισχυρισμού 3:

Αν $T^{-1}AT = XY - YX$ τότε

$A = T(XY - YX)T^{-1} = (TXT^{-1})(TYT^{-1}) - (TYT^{-1})(TXT^{-1}) = BC - CB$

Ισχυρισμός 4 Αν ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

έχει ίχνος 0 δηλαδή $p + s = 0$ τότε υπάρχει πίνακας

$$T = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

με $xt \neq 0$ (επομένως και αντιστρέψιμος) ώστε ο πίνακας $T^{-1}AT$ να έχει τα στοιχεία της διαγωνίου του ίσα με 0.

Απόδειξη του ισχυρισμού 4. Υποθέτουμε πρώτα ότι $r \neq 0$. Πράγματι κάνοντας τον πολλαπλασιασμό $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}$ βρίσκουμε ότι τα στοιχεία της διαγωνίου του $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}$ είναι $t^{-1}(pt - ry)$ και $t^{-1}(st + ry)$. Θέλουμε να είναι ίσα με 0 δηλαδή

$pt - ry = 0, \quad st + ry = 0$

Το παραπάνω ομογενές σύστημα με αγνώστους t, y έχει ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} p & -r \\ s & r \end{vmatrix} = pr + rs = r(p + s) = 0$$

και επομένως έχει μη μηδενική λύση (t, y) . Σε αυτή τη λύση αποκλείεται $t = 0$ διότι τότε θα είναι αναγκαστικά $y = 0$ (άτοπο). Στην περίπτωση λοιπόν όπου $r \neq 0$ ο πίνακας T υπάρχει.

Στην περίπτωση όπου $r = 0$ αλλά $q \neq 0$ μπορούμε να πάρουμε πρώτα τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & r \\ q & p \end{bmatrix}$$

και να εφαρμόσουμε το προηγούμενο συμπέρασμα στον

$$\begin{bmatrix} s & r \\ q & p \end{bmatrix}$$

Τελικά ο

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{T} \right)^{-1} \mathrm{A} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{T} \right)$$

θα έχει τα στοιχεία της διαγωνίου 0. Τέλος αν αμφότερα τα r , q είναι 0 τότε

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

και κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \mathrm{A} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ ('Οπως ετέθη από το μέλος stelmarg7)
Μια άσκηση στις μερικές παραγώγους
>>εστώ η συνάρτηση f με
>>u=f(x+αt,ψ+bt) δείξτε ότι η n-οστή παράγωγος του u ως προς t είναι'
>>d^n(u)/dt^n= (αDχ+bDψ)^n.u
>>όπου Dχ=d/dx και Dψ=d/dψ (οι πρώτες παράγωγοι ως προς χ και ψ αντίστοιχα)
>>και είναι και δυνάμεις του D στο δυωνυμικό ανάπτυγμα , παριστάνουν επαναλαμβανόμενες παραγωγίσεις
>>Αν μπορεί κάποιος ας με βοηθήσει, σας ευχαριστώ!
ΑΠΑΝΤΗΣΗ (Ν.Σ. Μαυρογιάννης)

Συμβολίζουμε με D_1, D_2 τις δύο πρώτες μερικές παραγώγους ως προς x, y αντίστοιχα.
'Εστω ότι είναι

$$r(t) = (x + ta, y + tb)$$

Τότε

$$u = f(r(t)) = (f \circ r)(t)$$

Εργαζόμαστε με επαγωγή.
Από τον κανόνα της αλυσσίδας είναι

$$\frac{df(r(t))}{dt} = (f(r(t)))' = (\nabla f)(r(t)) \cdot r'(t) =$$
$$= (D_1 f((r(t)), D_2 f((r(t))) \cdot (a, b) =$$
$$= aD_1 f((r(t)) + bD_2 f((r(t)) =$$
$$= ((aD_1 + bD_2)f)(r(t)) = (aD_1 + bD_2)u$$

'Αρα για $n = 1$ ο ισχυρισμός αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι αληθεύει για $n = k$ δηλαδή ότι

$$\frac{d^k f(r(t))}{dt} = \left((aD_1 + bD_2)^k f\right)(r(t))$$

Δείχνουμε ότι αληθεύει για $n = k + 1$

Ονομάζουμε χάριν απλότητας $g(x, y) = \left((aD_1 + bD_2)^k f\right)(x, y)$
'Εχουμε

$$\frac{d^{k+1} f(r(t))}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^k f(r(t))}{dt}\right) = \left(\frac{d^k f(r(t))}{dt}\right)' =$$
$$= (g(r(t)))' = (\nabla g)(r(t)) \cdot r'(t) =$$
$$= (D_1 g((r(t)), D_2 g((r(t))) \cdot (a, b) =$$
$$= aD_1 g((r(t)) + bD_2 g((r(t)) =$$
$$= \left((aD_1 + bD_2)(aD_1 + bD_2)^k f\right)(r(t)) =$$
$$= \left((aD_1 + bD_2)^{k+1} f\right)(r(t)) = (aD_1 + bD_2)^{k+1} u$$