Παρατηρήσεις στα Θέματα Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης του έτους 2007

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

12 Ιουνίου 2007

Περίληψη

Οι σημειώσεις αυτές αναφέρονται στα θέματα Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης του έτους 2007 και κατά κύριο λόγο απευθύνονται σε μαθηματικούς. Επιχειρείται μία συζήτηση των θεμάτων πέραν των τυπικών απαντήσεων. Για διευκόλυνση οι εκφωνήσεις των θεμάτων έχουν περιληφθεί ως προσάρτημα στο τέλος.

1 Το Θέμα 1

1.1 Τα ερωτήματα A1, A2, A3

Πρόκειται για ερωτήματα που οι απαντήσεις υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο. Χαρακτηριστικό όμως είναι ότι αρκετοί μαθητές ως απάντηση στο A2 έδωσαν την ακόλουθη “ Δύο συναρτήσεις είναι ίσες αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο ”. Η απάντηση αυτή είναι εσφαλμένη για πολλούς λόγους. Πρώτα απ΄ όλα εισάγει μία έννοια που δεν είναι καλώς ορισμένη στο σχολικό βιβλίο. Εκείνη του “ τύπου ”. Αλλά ακόμη και αν το προσπεράσουμε θα πρέπει να συμφωνήσουμε τί εννοούμε λέγοντας “ τύπος ”. Προφανώς λίγο πολύ εννοούμε κάποια έκφραση γνωστών συμβόλων που μας δίνει τη τιμή της συνάρτησης σε κάθε x που η συνάρτηση ορίζεται. Ενδεχομένως να χρησιμοποιούνται διαζευκτικά διαφορετικές τέτοιες εκφράσεις όπως συμβαίνει με τις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου.

Ας πάρουμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_1^x t dt$. Ποιός είναι ο τύπος της; Ο $\int_1^x t dt$ ή ο $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$; Αν πούμε ο δεύτερος τι έχουμε να πούμε για τη συνάρτηση $F(x) = \int_1^x \frac{\eta\mu t}{t} dt$ για την οποία είναι γνωστό ότι το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται[1] στοιχειωδώς; Στο δεύτερο παράδειγμα θα πρέπει να αρκεσθούμε στην έκφραση $\int_1^x \frac{\eta\mu t}{t} dt$ που πιό πολύ αποτελεί μία περιγραφή παρά ένα τύπο όπως τον αντιλαμβανόμαστε.

Εν τέλει όλα τα Μαθηματικά μπορούν να γραφούν σειριακά δηλαδή σε μία ευθεία γραμμή. Ένας τύπος είναι μία συμβολοσειρά που ακολουθεί βέβαια κάποιους συντακτικούς κανόνες. Δύο τύποι είναι ίδιοι αν για να τους γράψουμε χρησιμοποιήσαμε ακριβώς τα ίδια σύμβολα με την ίδια ακριβώς σειρά. Αν μάλιστα γράφουμε σε γραφομηχανή ή υπολογιστή αυτό σημαίνει να πατήσουμε τα ίδια ακριβώς πλήκτρα με την ίδια βέβαια σειρά. Ωστόσο μπορεί δύο ίσες συναρτήσεις να έχουν

[1] Δηλαδή, όπως έχει αποδειχθεί, δεν υπάρχει τρόπος να γραφεί το ολοκλήρωμα αυτό ως παράσταση των γνωστών μας “ στοιχειωδών ” συναρτήσεων

τύπους που δεν είναι με την παραπάνω έννοια ίδιοι. Οι τύποι

```
3
```

και

```
2+sin^2(x+2)+cos^2(x+2)
```

είναι διαφορετικοί αλλά εκφράζουν ίσες συναρτήσεις.

1.2 Τα ερωτήματα Βα, Ββ, Βγ, Βδ, Βε

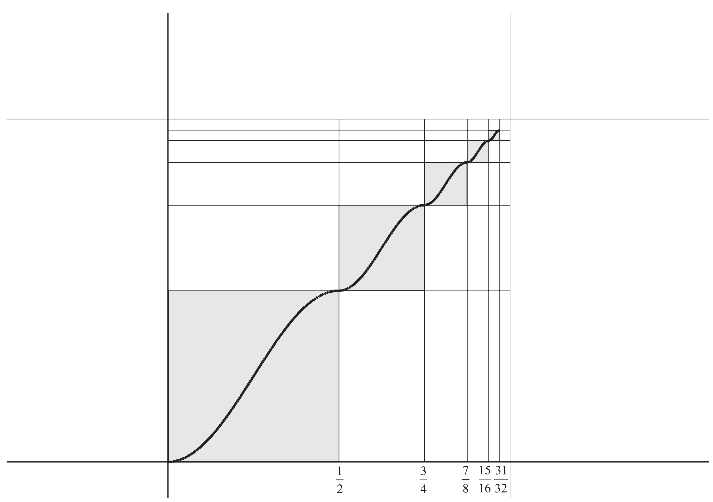
Βα Είναι λάθος. Από το γεγονός ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ μπορούμε να συνάγουμε μόνο ότι θα έχει μη αρνητική παράγωγο. Πράγματι αν x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ τότε λόγω της μονοτονίας για κάθε $x \neq x_0$ ισχύει $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. Όταν όμως περάσουμε στο όριο για $x \to x_0$ τότε απλώς μπορούμε να συμπεράνουμε είναι ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ δηλαδή $f'(x_0) \geq 0$. Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $f(x) = x^3$ που αν και γνησίως αύξουσα η παράγωγος της $f'(x) = 3x^2$ είναι παντού θετική εκτός από το 0 όπου είναι 0. Ένα λιγότερο συνηθισμένο παράδειγμα είναι η συνάρτηση f ορισμένη στο $[0,1)$ η οποία σε κάθε υποδιάστημα

$$\Delta_\nu = [1 - \frac{1}{2^{\nu-1}}, 1 - \frac{1}{2^\nu})$$

του $[0,1)$ (τα διαστήματα αυτά είναι ανά δύο ξένα και καλύπτουν το $[0,1)$) ορίζεται να είναι

$$f(x) = \frac{\beta-\alpha}{2}\left(\eta\mu\left(\frac{\pi(x-\alpha)}{\beta-\alpha} - \frac{\pi}{2}\right) + 1\right) + a$$

με $\alpha = 1 - \frac{1}{2^{\nu-1}}$, $\beta = 1 - \frac{1}{2^\nu}$



Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης προκύπτει με επανάληψη ενός κομματιού που είναι όμοιο με το προηγούμενο του και με λόγο ομοιότητας

$\frac{1}{2}$. Πρόκειται για μία παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα συνάρτηση της οποίας η παράγωγος μηδενίζεται σε άπειρα σημεία. Η επόμενη πρόταση μας δίνει και ένα κριτήριο γνήσιας μονοτονίας για μία συνάρτηση με μη αρνητική παράγωγο:

Πρόταση 1.1 *Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) \geq 0$ για όλα τα x. Έστω $M(f')$ το σύνολο των σημείων του Δ στα οποία μηδενίζεται η f'. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. *Η f είναι γνησίως αύξουσα.*
2. *Το $M(f')$ δεν περιέχει διάστημα.*

Απόδειξη. ($1. \Rightarrow 2.$) Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Αν υποτεθεί ότι το $M(f')$ περιέχει κάποιο διάστημα J τότε θεωρούμε $x_1 < x_2$ από το J. Ασφαλώς $J \subseteq \Delta$. Από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$ για κάποιο ξ μεταξύ των x_1, x_2. Θα είναι όμως $\xi \in J \subseteq M(f')$ και επομένως $f'(\xi) = 0$. Άρα $f(x_1) = f(x_2)$ (άτοπο).
($2. \Rightarrow 1.$) Υποθέτουμε ότι το $M(f')$ δεν περιέχει διάστημα και δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Θεωρούμε γιαυτό $x_1 < x_2$ και θέλουμε $f(x_1) < f(x_2)$. Ήδη από τη συνθήκη $f'(x) \geq 0$ έχουμε ότι $f(x_1) \leq f(x_2)$ και επομένως αρκεί να αποκλείσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Άν όμως αυτό συνέβαινε για κάθε x με $x_1 \leq x \leq x_2$ θα ήταν $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ και επομένως $f(x) = f(x_1)$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι σταθερή στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Άρα $f'(x) = 0$ για όλα τα $x \in [x_1, x_2]$. Αυτό συνεπάγεται ότι $[x_1, x_2] \subseteq M(f')$ (άτοπο). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. **ο.ε.δ.**

Βγ Είναι λάθος. Η έκφραση “ η h είναι συνεχής στο x_0 ” εμπεριέχει δύο παραδοχές που πρέπει να πληρούνται και οι δύο:

- Η h ορίζεται στο x_0
- Το όριο της h στο x_0 καθώς και η τιμή της στο x_0 συμπίπτουν

Τόσο η συνέχεια όσο και η ασυνέχεια αναφέρονται σε σημεία του πεδίου ορισμού. Στην προκειμένη περίπτωση με $h = g \circ f$ η h μπορεί να μην ορίζεται καν στο x_0 ή να ορίζεται αλλά να αποτυγχάνει να είναι συνεχής. Δύο παραδείγματα αυτών των περιπτώσεων είναι τα ακόλουθα:

1. $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x-1}$, $x_0 = 2$
2. $g(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x < 3 \\ x & , \quad x \geq 3 \end{cases}$, $f(x) = x + 1$, $x_0 = 2$

Βδ Είναι σωστό. Αποτελεί συνδυασμό δύο τύπων παραγώγισης.

Βε Είναι σωστό. Μάλιστα ισχύει το “ αν και μόνο αν”.

2 Το Θέμα 2

Στο θέμα αυτό χρησιμοποιήθηκε ένας μετασχηματισμός Möbius κάτι που έχει συμβεί αρκετές φορές και στο παρελθόν. Μετασχηματισμός Möbius είναι κάθε απεικόνιση του μιγαδικού f που απεικονίζει μιγαδικούς σε μιγαδικούς και έχει τη μορφή

$$f\left(z\right)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\,,\qquad \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0 \tag{1}$$

Για το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f ισχύουν τα ακόλουθα:

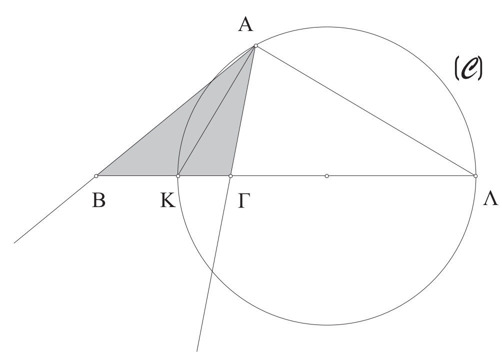
Αν $\gamma = \mathbf{0}$**:** Τότε θα είναι αναγκαστικά $\delta \neq 0$. Το πεδίο ορισμού καθώς και το σύνολο τιμών είναι όλο το $\mathbb{C}$.

Αν $\gamma \neq \mathbf{0}$**:** Το πεδίο ορισμού της απαρτίζεται από όλους τους μιγαδικούς που είναι διάφοροι από το $-\frac{\delta}{\gamma}$. Το σύνολο τιμών της περιλαμβάνει πάλι όλους τους μιγαδικούς αριθμούς εκτός από ένα: τον $\frac{\alpha}{\gamma}$. Αυτό διαπιστώνεται εύκολα. Η εξίσωση $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}=w$ έχει πάντα ακριβώς μία λύση εκτός αν $w=\frac{\alpha}{\gamma}$ οπότε είναι αδύνατη.

Σε κάθε περίπτωση η απεικόνιση f είναι 1-1. Πέραν τούτου έχει και μερικές ακόμη ιδιότητες που την καθιστούν ελκυστική στη δημιουργία θεμάτων. Ας δούμε γιατί: Είναι γνωστό ότι κάθε ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο μπορει να πάρει τη μορφή

$$|z-z_1|=|z-z_2|\quad ,\qquad z_1\neq z_2 \tag{2}$$

Αυτό διότι κάθε ευθεία είναι και μεσοκάθετος κάποιου ευθυγράμμου τμήματος. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα κύκλο $\mathcal{C}$. Επιλέγουμε μία διάμετρο ΚΛ του $\mathcal{C}$ και ένα σημείο του Α. Από το Α φέρνουμε μία ευθεία που τέμνει την διάμετρο εσωτερικά σε κάποιο σημείο Γ διαφορετικό από το κέντρο του κύκλου. Η συμμετρική ευθεία της ΑΓ ως προς την ΑΚ τέμνει τον φορέα της ΚΛ στο Β.



Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΚ είναι εσωτερική διχοτόμος και προφανώς η ΑΛ είναι εξωτερική διχοτόμος. Ο κύκλος $\mathcal{C}$ δεν είναι άλλος από τον Απολλώνιο κύκλο του ΑΒΓ και επομένως για κάθε σημείο του Μ θα ισχύει

$$\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{M\Gamma}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}}$$

Αν ονομάσουμε z_1, z_2 τους μιγαδικούς που αντιστοιχούν στα σημεία Α, Β και $\lambda=\frac{AB}{A\Gamma}\neq 1$ βλέπουμε ότι ο κύκλος $\mathcal{C}$ περιγράφεται από τη σχέση

$$\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|}=\lambda \tag{3}$$

Αποτελεί μία εύκολη άσκηση να δείξουμε ότι αν ένας μιγαδικός ικανοποιεί την σχέση (3) με $\lambda\neq 1$ τότε ανήκει σε κύκλο. Η σχέση (3) όμως μπορεί να περιγράψει και ευθείες αρκεί να επιτρέψουμε στο λ και την τιμή 1 αφού η (2) είναι ειδική περίπτωση της (3).

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε την επόμενη:

Πρόταση 2.1 *Ένας μετασχηματισμός Möbius απεικονίζει κύκλους ή ευθείες σε κύκλους ή ευθείες.*

Απόδειξη: Κάθε κύκλος ή ευθεία περιγράφεται από μία εξίσωση της μορφής (3). Ας ονομάσουμε $w = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$. Θα βρούμε σε τί γραμμή ανήκει ο w. Λύνοντας ως προς z βρίσκουμε $z = -\frac{\beta - w\delta}{\alpha - w\gamma}$. Αντικαθιστώντας στην (3) βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\left|-\frac{\beta-w\delta}{\alpha-w\gamma} - z_1\right|}{\left|-\frac{\beta-w\delta}{\alpha-w\gamma} - z_2\right|} = \lambda$$

η οποία όπως διαπιστώνεται μετά από λίγες πράξεις ισοδυναμεί με την:

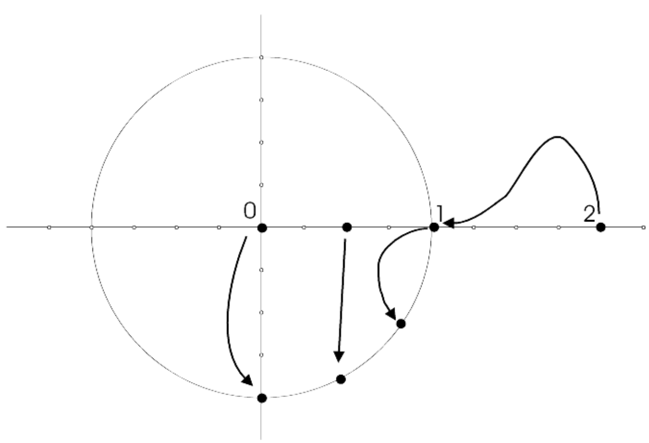
$$\frac{\left|w - \frac{\beta+z_1\alpha}{\delta+z_1\gamma}\right|}{\left|w - \frac{\beta+z_2\alpha}{\delta+z_2\gamma}\right|} = \lambda\frac{|\delta + z_2\gamma|}{|\delta + z_1\gamma|}$$

Η τελευταία όμως σχέση είναι της μορφής (3). Επομένως το η εικόνα του w ανήκει σε ευθεία ή κύκλο. **ο.ε.δ.**

Στο συγκεκριμένο θέμα έχουμε τον μετασχηματισμό $\alpha \to \frac{i\alpha+2}{\alpha+2i}$. Μπορούμε να μάθουμε - και τούτο ανεξάρτητα από την εκφώνηση που μας το λέει- σε τι γραμμή ανήκει ο $w = \frac{i\alpha+2}{\alpha+2i}$ αρκεί να λύσουμε ως προς α βρίσκοντας $\alpha = -2\frac{iw-1}{w-i}$ και να απαιτήσουμε $\alpha \in \mathbb{R}$ που ισοδυναμεί με την

$$-2\frac{iw-1}{w-i} = \overline{\left(-2\frac{iw-1}{w-i}\right)}$$

από την οποία βρίκουμε $2i\,|w|^2 = 2i$ δηλαδή $|w| = 1$. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι κάθε σημειό του μοναδιαίου κύκλου είναι και εικόνα κάποιου α εκτός από το σημείο που είναι η εικόνα του i. Με άλλα λόγια η πραγματική ευθεία συρρικνώνεται ώστε να γίνει ένα ανοικτό διάστημα πλάτους 2π που τελικά θα τυλιχθεί στον κύκλο.



2.1 Το Ερώτημα α.

2.1.1 Η σύντομη απόδειξη

Γίνεται με άμεσο υπολογισμό:

$$\left|\frac{2+\alpha i}{a+2i}\right| = \frac{|2+\alpha i|}{|a+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+2^2}} = 1$$

2.1.2 Ουδέν κακόν αμιγές καλού

Μερικά παιδιά για να απαντήσουν στο ερώτημα έκαναν αρκετές πράξεις. Πρώτα έθεσαν τον μιγαδικό αριθμό σε κανονική μορφή:

$$z = \frac{2+i\alpha}{\alpha+2i} = \frac{4\alpha}{\alpha^2+4} + \frac{\alpha^2-4}{\alpha^2+4}i \tag{4}$$

και στη συνέχεια υπολόγισαν το μέτρο:

$$|z| \sqrt{\left(\frac{4\alpha}{\alpha^2+4}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^2-4}{\alpha^2+4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16\alpha^2+\left(\alpha^2-4\right)^2}{\left(\alpha^2+4\right)^2}} = \sqrt{\frac{\alpha^4+8\alpha^2+16}{\alpha^4+8\alpha^2+16}} = 1$$

Πολλή δουλειά για το τίποτα! Ωστόσο η σχεση (4) έχει ενδιαφέρον. Με μερικές επεμβάσεις γράφεται:

$$z = \frac{2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+1} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-1}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+1}i$$

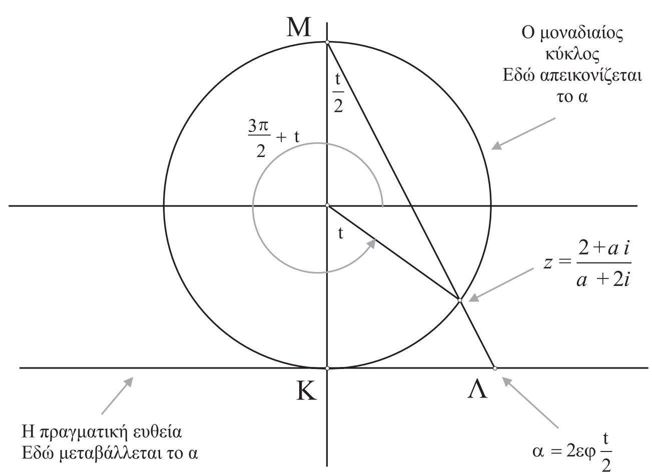
Αν ονομάσουμε $\frac{\alpha}{2} = \varepsilon\varphi\frac{t}{2}$ έχουμε:

$$z = \frac{2\varepsilon\varphi^2\frac{t}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{t}{2}} - \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{t}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{t}{2}}i$$

και από γνωστούς τύπους βρίσκουμε:

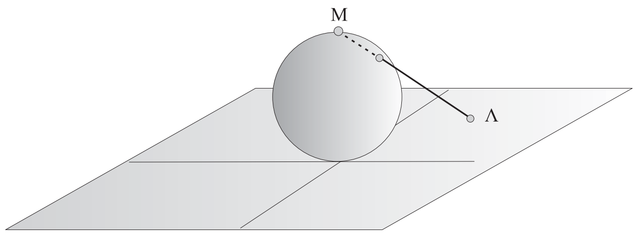
$$z = \eta\mu t - i\sigma\upsilon\nu t$$

Μπορούμε να έχουμε και μία γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω σχέσης αν κρατήσουμε το μοναδιαίο κύκλο στη θέση του αλλά μετακινήσουμε την πραγματική ευθεία κάνοντας την εφαπτομένη του.



Εύκολοι υπολογισμοί στο τρίγωνο ΚΛΜ μας δείχνουν ότι $\widehat{\text{ΚΜΛ}} = \frac{t}{2}$ και επομένως η εικόνα του z έχει συντεταγμένες $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{2}+t\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{2\pi}{2}+t\right)$ δηλαδή $\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t$. Για να βρούμε που αντιστοιχεί το α το τοποθετούμε στον άξονα αποκτούμε το Λ το οποίο και ενώνουμε με το Μ. Το σημείο όπου η ΛΜ θα τμήσει τον κύκλο είναι η εικόνα του z.

Αυτή η διάταξη μας επιτρέπει ουσιαστικά να απεικονίσουμε την ευθεία στον κύκλο. Αν τώρα όλο το σύστημα περιστραφεί γύρω από την ΜΚ η ευθεία ΚΛ θα μας δώσει ένα επίπεδο. Ας φαντασθούμε ότι είναι το μιγαδικό. Ο κύκλος θα μας δώσει μία σφαίρα που θα είναι μοναδιαία. Το Λ θα είναι πλέον ένας μιγαδικός αριθμός και θα απεικονίζεται στην επιφάνεια της σφαίρας. Όλα τα σημεία της σφαίρας θα είναι αντίστοιχα κάποιου μιγαδικού εκτός από τον Βόρειο Πόλο της δηλαδή το σημείο Μ. Πρόκειται για τη γνωστή διάταξη της σφαίρας του Riemann με την οποία μπορούμε να απεικονίσουμε ή αλλιώς να δούμε το μιγαδικό επίπεδο και τα συμβάντα του πάνω σε μία σφαίρα.



2.2 Το Ερώτημα β

Για $\alpha = 0$ βρίσκουμε $z_1 = -i$ και για $\alpha = 2$ βρίσκουμε $z_2 = 1$.

2.2.1 Το Ερώτημα βi.

Είναι $|z_1 - z_2| = |-i-1| = \sqrt{2}$ κάτι που φαίνεται βέβαια και από το σχήμα.

2.2.2 Το Ερώτημα βii.

Είναι $z_1^{2\nu} = \left(z_1^2\right)^\nu = (-1)^\nu$ και $(-z_2)^\nu = (-1)^\nu$ επομένως $z_1^{2\nu} = (-z_2)^\nu$.

3 Το Θέμα 3

Στο θέμα αυτό ζητήθηκαν απλά αλλά ουσιώδη καθήκοντα σε μία τριτοβάθμια καμπύλη. Η μορφή της καμπύλης

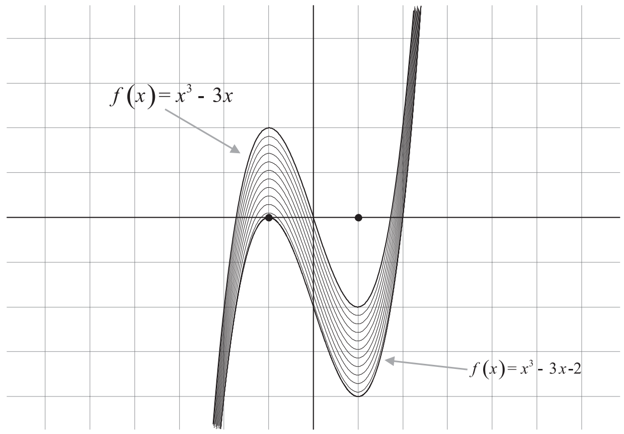
$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

μπέρδεψε κάποιους μαθητές οι οποίοι παραγώγισαν και το ημίτονο ως να ήταν και η θ μεταβλητή. Στην ουσία πρόκειται για μία παρμετρική οικογένεια καμπυλών με παράμετρο το θ. Τα πράγματα απλουστεύονται πολύ αν λάβουμε υπ΄ όψιν ότι αφού $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ το $\eta\mu^2\theta$ διατρέχει το $(0,1]$ και επομένως η οικογένεια μας είναι της μορφής

$$f(x) = x^3 - 3x - m, \qquad m \in (0,2]$$

Στο σχήμα που ακολουθεί εμφανίζονται μερικά μέλη της οικογένειας. Η συνάρτηση που βρίσκεται ψηλότερα είναι η $f(x) = x^3 - 3x$ και περιλαμβάνεται στην οικογένεια.

Η συνάρτηση που βρίσκεται χαμηλότερα είναι η $f(x) = x^3 - 3x - 2$ *και δεν περιλαμβάνεται* στην οικογένεια.



3.1 Το Ερώτημα α.

Έχουμε $f(x) = x^3 - 3x - m$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, $f''(x) = 6x$ και η f έχει τον ακόλουθο πίνακα μεταβολής:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		-		-	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	τοπικό μέγιστο $2\text{-}m>0$	$\searrow$	σημείο καμπής $(0,-m)$	$\searrow$	τοπικό ελάχιστο $-2\text{-}m<0$	$\nearrow$	$+\infty$

από τον οποίο προκύπτει και η απάντηση στο έρώτημα.

3.2 Το Ερώτημα β.

Επειδή το όριο της f στο $-\infty$ είναι $-\infty$ θα υπάρχει $x_1 < -1$ ώστε $f(x_1) < 0$. Είναι $f(-1) = 2 - m > 0$ και επομένως θα υπάρχει τιμή του x μεταξύ των $x_1, -1$ δηλαδή στο διάστημα $(-\infty, -1)$ που θα μηδενίζει την f. Λόγω μονοτονίας η τιμή αυτή είναι η μοναδική στο διάστημα $(-\infty, -1)$. Άρα η f έχει ακριβώς μία ρίζα σε αυτό το διάστημα. Επιχειρηματολογώντας ανάλογα συνάγουμε ότι η f έχει άλλες δύο ρίζες μία σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

3.3 Το Ερώτημα γ.

Με το συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα η ευθεία γράφεται $y = -2x - m$ και είναι εντελώς απλό να επαληθεύσουμε ότι τα σημεία $(-1, 2-m)$, $(0, -m)$, $(1, -2-m)$ ανήκουν σε αυτή την ευθεία.

Στο ερώτημα αυτό αξιοποιείται η συμμετρία της κυβικής καμπύλης κάτι που έχει γίνει και σε ένα θέμα του 1985. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

με $\alpha \neq 0$. Η f μπορεί να έχει ή να μην έχει τοπικά ακρότατα (αυτό εξαρτάται από το αν $\beta^2 - 3\alpha\gamma > 0$ ή αν $\beta^2 - 3\alpha\gamma \leq 0$) αλλά σε κάθε περίπτωση έχει σημείο καμπής το $\left(-\frac{\beta}{3\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right)\right)$ το οποίο είναι και κέντρο συμμετρίας της γραφικής της παράστασης. Για να το επαληθεύσουμε αυτό αρκεί να αποδείξουμε ότι το συμμετρικό του τυχόντος σημείου της $\mathcal{C}_f$, ας πούμε του $\left(-\frac{2\beta}{3\alpha} - h, f\left(-\frac{2\beta}{3\alpha} - h\right)\right)$ ως προς το $\left(-\frac{\beta}{3\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right)\right)$ είναι επίσης σημείο της $\mathcal{C}_f$. Αν είναι (p, q) το συμμετρικό τότε από τις σχέσεις

$$\frac{-\frac{\beta}{3\alpha} - h + p}{2} = -\frac{\beta}{3\alpha}, \qquad \frac{f\left(-\frac{\beta}{3\alpha} - h\right) + q}{2} = f\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right)$$

βρίσκουμε ότι

$$p = -\frac{\beta}{3\alpha} + h, \qquad q = 2f\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right) - f\left(-\frac{\beta}{3\alpha} - h\right)$$

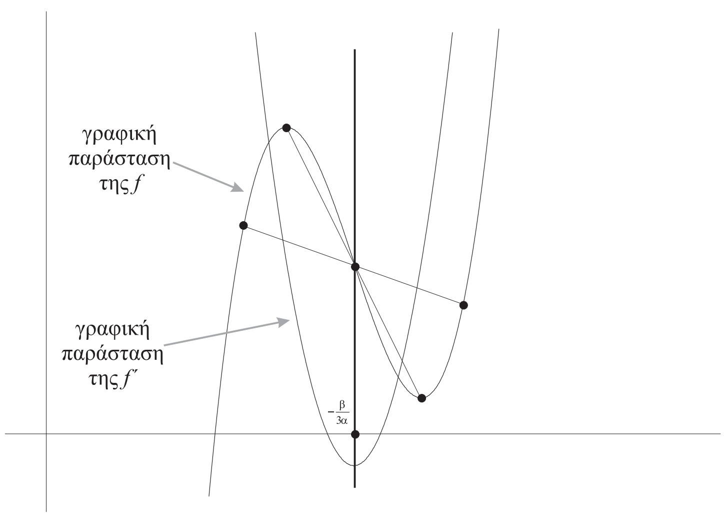
και πρέπει να διαπιστώσουμε ότι ισχύει $f(p) = q$ με άλλα λόγια ότι:

$$f\left(-\frac{\beta}{3\alpha} + h\right) = 2f\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right) - f\left(-\frac{\beta}{3\alpha} - h\right) \tag{5}$$

Κάνοντας κάποιες πράξεις διαπιστώνουμε ότι η (5) αληθεύει. Αφού η (5) αληθεύει για κάθε h μπορούμε να την παραγωγίζουμε. Θα βρούμε:

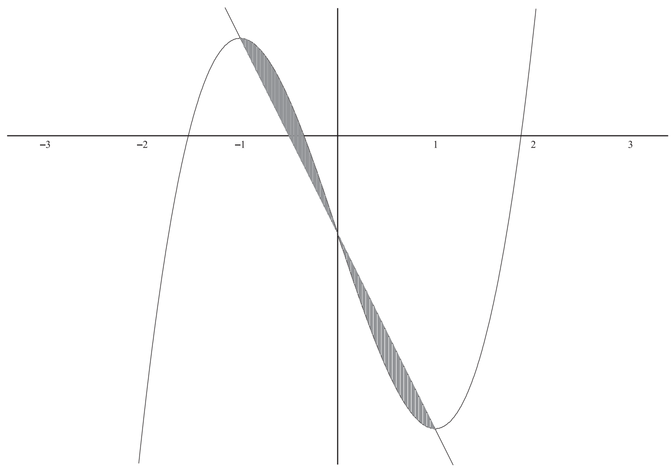
$$f'\left(-\frac{\beta}{3\alpha} + h\right) = f'\left(-\frac{\beta}{3\alpha} - h\right) \tag{6}$$

Η σχέση (6) μας πληροφορεί ότι η f' έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{3\alpha}$. Λόγω της (6) οι τετμημένες των ριζών της f', εφ΄ όσον υπάρχουν, είναι σημεία του $x'x$ συμετρικά ως προς το σημείο του με τετμημένη $-\frac{\beta}{3\alpha}$ και λόγω της (5) τα σημεία της $\mathcal{C}_f$ που αντιστοιχούν σε αυτές τις ρίζες δηλαδή *τα σημεία ακροτάτων της f θα είναι συμμετρικά ως προς το σημείο καμπής.*



3.4 Το Ερώτημα δ.

Με $m = \eta\mu^2\theta$, όπως και πριν, η συνάρτηση γράφεται $f(x) = x^3 - 3x - m$ και η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -2x - m$. Η διαφορά τους είναι $x^3 - 3x - m - (-2x - m) = x(x-1)(x+1)$. Ευθεία και καμπύλη έχουν όπως αναμένται τρία κοινά σημεία και η διαφορά μεταξύ των -1, 0 είναι θετική ένώ μεταξύ των 0,1 είναι αρνητική.



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_{-1}^{1} |f(x) - (-2x - m)|\, dx = \int_{-1}^{1} |x(x-1)(x+1)|\, dx =$$

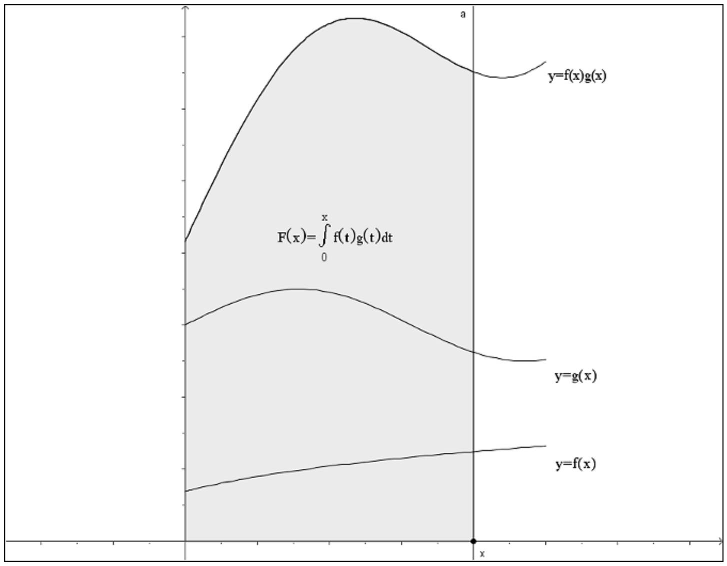
$$= \int_{-1}^{0} x(x-1)(x+1)\, dx - \int_{0}^{1} x(x-1)(x+1)\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}$$

4 Το Θέμα 4

4.1 Το Ερώτημα α.

Ήταν το εύκολο ερώτημα του θέματος και συγκέντρωνε περίπου το 1/3 των μονάδων. Η f είναι γνησίως αύξουσα και αφού η αρχική τιμή της $f(0)$ είναι θετική θα είναι και όλες οι άλλες τιμές. Η g είναι παντού θετική και επομένως η fg είναι παντού θετική. Ολοκληρώνουμε μία θετική συνάρτηση στο διάστημα $[0, x]$ και επομένως το αποτέλεσμα θα είναι θετικό. Γεωμετρικα αυτό δεν λέει τίποτε περισσότερο από το ότι τα εμβαδά διδιάστατων χωρίων είναι πάντα θετικά!



Ασφαλώς μπορούν να δοθούν και άλλες αποδείξεις που χρησιμοποιούν παραγώγιση.

4.2 Το Ερώτημα β.

Το ερώτημα αυτό ήταν το δυσκολότερο. Η δυσκολία του οφείλεται στο ότι ζητείται να αποδειχθεί μία ανισότητα όπου κάποιο μέλος (το πρώτο) δεν είναι κατ΄ ανάγκην παραγωγίσιμη συνάρτηση. Και επομένως δε μπορούν να εφαρμοσθούν οι τυπικές τεχνικές μελέτης συνάρτησης. Με το ερώτημα αυτό οι εξεταστές ζητούσαν από τα παιδιά το αυτονόητο: να σκεφθούν. Αφήνοντας βέβαια στην άκρη τις διαβόητες " μεθοδολογίες ".

4.2.1 Μία ατυχής απάντηση

Αν η συνάρτηση f ήταν παραγωγίσιμη, **λέμε άν**, τότε ονομάζοντας

$$h(x) = f(x) \cdot G(x) - F(x)$$

και παραγωγίζοντας θα έχουμε

$$h'(x) = f'(x) G(x) + f(x) G'(x) - F'(x)$$

από την οποία προκύπτει

$$h'(x) = f'(x) G(x) + f(x) g(x) - f(x) g(x)$$

δηλαδή

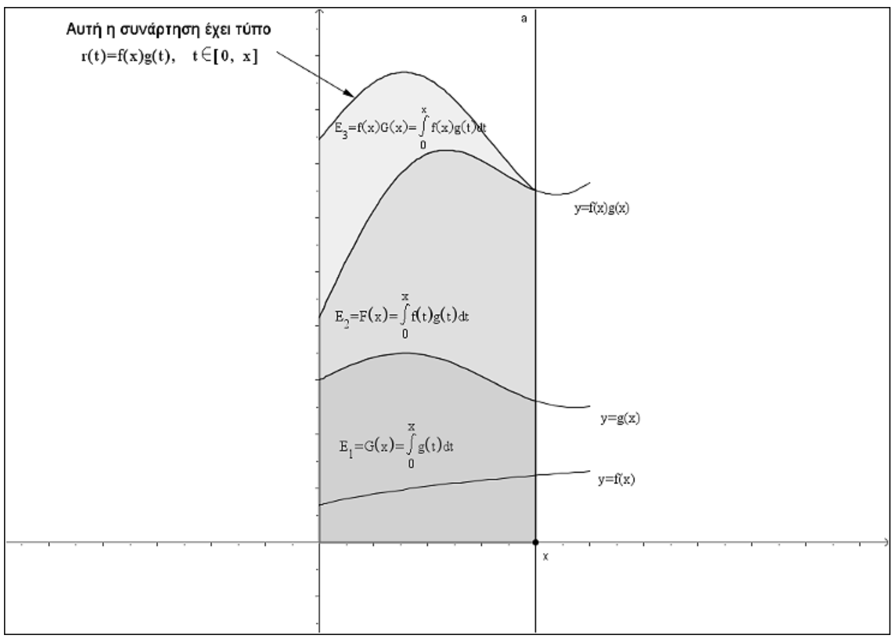
$$h'(x) = f'(x) G(x)$$

Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι $f'(x) \geq 0$ και δεδομένου ότι $g(x) > 0$ στο $(0, x]$ έχουμε ότι $h'(x) \geq 0$. Αυτό μας επιτρέπει απλώς να συνάγουμε ότι $h(x) \geq h(0) = 0$. Ωστόσο μπορούμε να εξασφαλίσουμε και την γνήσια ανισότητα $h(x) > 0$ ως εξής: Αν συνέβαινε $h(x) = 0$ τότε στο διάστημα $[0, x]$ η h θα ήταν 0 αφού είναι αύξουσα και οι τιμές στα άκρα συμπίπτουν. Άρα στο $(0, x)$ η παράγωγος της h δηλαδή η $f'(x)\,G(x)$ θα ήταν μηδέν και επομένως θα ήταν αναγκαστικά η f' μηδέν δεδομένου ότι η G είναι πάντα θετική. Αυτό θα σήμαινε ότι η f είναι σταθερή στο διάστημα $[0, x]$ πράγμα αδύνατο αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Φυσικά μία τέτοια απάντηση προϋποθέτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη και επομένως καταπιάνεται με μία πολύ ειδική περίπτωση. Τηρουμένων των αναλόγιών είναι ως εάν να ζητείται να αποδειχθεί ότι τα ύψη ενός τριγώνου συμπίπτουν και να το αποδεικνύει κάποιος για ορθογώνια! Ως απάντηση στο ερώτημα *ακόμα και σε πλήρη ανάπτυξη* είναι εσφαλμένη.

4.2.2 Μία Γεωμετρική Ερμηνεία

Πριν περάσουμε στις απαντήσεις στο ερώτημα αυτό ας δούμε τι μας λέει η προς απόδειξη ανισότητα γεωμετρικά:



Έστω ένα x μεταξύ 0, 1. Η ευθεία που είναι κάθετη στον $x'x$ στο σημείο του με τετμημένη x και ο άξονας $y'y$ ορίζουν μία ταινία. Μέσα σε αυτή την ταινία και πάνω από τον $x'x$ βρίσκονται μέρη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g και fg που αν τις περιορίσουμε στο $[0, x]$ έχουν τύπους $f(t)$, $g(t)$ και $f(t)g(t)$. Η $g(t)$ μέσα στην ταινία και πάνω από τον $x'x$ σχηματίζει ένα χωρίο εμβαδού E_1 ενώ αντίστοιχο εμβαδό E_2 σχηματίζει και η $f(t)g(t)$. Τώρα για να προκύψει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(t)\,g(t)$, $t \in [0, x]$ παίρνουμε κάθε σημείο $(t, g(t))$ της γραφικής παράστασης της g και πολλαπλασιάζουμε την τεταγμένη του με $f(t)$. Αν όμως πολλαπλασιάσουμε τα $g(t)$ με το $f(x)$ που είναι, λόγω της μονοτονίας της f πιο μεγάλο από όλα τα άλλα $f(t)$ θα προκύψει η γραφική παράσταση της $f(x)g(t)$ που θα είναι πιο πάνω από της $f(t)g(t)$ και θα σχηματίζει εμβαδόν E_3. Άρα $E_3 \geq E_2$. Όμως πολλαπλασιασμός της $g(t)$ με $f(x)$ επιφέρει ανάλογη μεταβολή στο εμβαδόν δηλαδή $E_3 = f(x)\,E_1$ και επομένως $f(x)\,E_1 \geq E_2$.

4.2.3 Μία πρώτη απάντηση στο 4β.

Μία τυπική απόδειξη της ανισότητας θα μπορούσε να είναι η ακόλουθη:

$$f(x)\,G(x) > F(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x)\int_0^x g(t)\,dt > \int_0^x f(t)\,g(t)\,dt \Leftrightarrow$$

$$f(x)\int_0^x g(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,g(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x f(x)\,g(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,g(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x \left(f(x)\,g(t) - f(t)\,g(t)\right)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x \left(f(x) - f(t)\right)g(t)\,dt > 0$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι ολοκληρώνουμε σε διάστημα και ο ολοκληρωτέος $(f(x) - f(t))\,g(t)$ για $0 < t < x$ είναι θετικός λόγω της μονοτονίας της f και του θετικού προσήμου της g και γίνεται μηδέν μόνο για $t = x$.

4.2.4 Παραγωγίζοντας αλλά σωστά

Όμως η ανισότητα $f(x)\,G(x) > F(x)$ *μπορεί να αποδειχθεί και με παραγώγιση.* Η παρακάτω ευφυής λύση, σχεδόν αυτούσια, δόθηκε από την τελειόφοιτη του Πειραματικού Λυκείου της Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης Αλεξάνδρα Ζαμπετάκη:

Για δοθέν $x \in (0,1]$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$H(\rho) = f(x)\,G(\rho) - F(\rho)\,, \quad \rho \in [0,x]$$

Προφανώς η H είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$H'(\rho) = f(x)\,G'(\rho) - F'(\rho) = f(x)\,g(\rho) - f(\rho)\,g(\rho) = g(\rho)\left(f(x) - g(\rho)\right)$$

Λόγω του θετικού προσήμου της g και της μονοτονίας της f είναι $H'(\rho)$ για κάθε $\rho \in (0,x)$ και επομένως η H είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως $H(\rho) > H(0) = 0$ για κάθε $\rho \in (0,x]$. Ειδικά για $\rho = x$ θα είναι

$$H(x) > 0$$

και επομένως

$$H(x) = f(x)\,G(x) - F(x) > 0$$

4.3 Το Ερώτημα γ.

Το ερώτημα αυτό δυσκόλεψε λιγότερο από το β. τους εξεταζόμενους διότι είχαν τη δυνατότητα να εργασθούν με παραγώγους.

4.3.1 Μία πρώτη απάντηση

Μία σχεδόν μηχανική απάντηση προκύπτει αν την αποδεικτέα

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

γράψουμε στην ισοδύναμη μορφή:

$$F(x)\,G(1) \leq F(1)\,G(x) \tag{7}$$

Ονομάζουμε

$$h(x) = F(x)\,G(1) - F(1)\,G(x) \qquad x \in [0,1]$$

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε:

$$h'(x) = f(x)\,g(x)\,G(1) - g(x)\,F(1)$$

Δηλαδή ότι:

$$h'(x) = g(x)\,(f(x)\,G(1) - F(1))$$

Λόγω της μονοτονίας της f είναι

$$f(x)\,G(1) - F(1) > f(0)\,G(1) - F(1) = \int_0^1 (f(0) - f(t))\,g(t)\,dt < 0$$

διότι στο ολοκλήρωμα $\int_0^1 (f(0) - f(t))\,g(t)\,dt$ ο ολοκληρωτέος $(f(0) - f(t))\,g(t)$ είναι αρνητικός για όλες τις τιμές του t εκτός από την $t = 0$. Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα και για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $h(x) \leq h(0) = 0$.

4.3.2 Μία δεύτερη και πιο ενδιαφέρουσα απάντηση

Θέλουμε

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$R(x) = \frac{F(x)}{G(x)} \qquad x \in (0,1]$$

και την μελετούμε ως προς τη μονοτονία. Έχουμε

$$R'(x) = \left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)' = \frac{F'(x)\,G(x) - F(x)\,G'(x)}{G^2(x)} =$$

$$= \frac{f(x)\,g(x)\,G(x) - F(x)\,g(x)}{G^2(x)} = \frac{g(x)\,(f(x)\,G(x) - F(x))}{G^2(x)}$$

Από το ερώτημα β. έχουμε ότι $R'(x) > 0$ και επομένως η R είναι γνησίως αύξουσα. Για $0 < x \leq 1$ θα ισχύει $R(x) \leq R(1)$ και μάλιστα το ίσον θα ισχύει μόνο για $x = 1$. Η αποδεικτέα προφανώς ισχύει.

4.3.3 Περισσότερος κόπος αλλά μεγαλύτερη ανταμοιβή

Αν εργασθούμε όπως πριν αλλά δε χρησιμοποιήσουμε το ερώτημα 4β. θα έχουμε:

$$R'(x) = \frac{f(x)\,g(x)\int_0^x g(t)\,dt - g(x)\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt}{G^2(x)} =$$

$$= \frac{\int_0^x f(x)\,g(x)\,g(t)\,dt - \int_0^x g(x)\,f(t)\,g(t)\,dt}{G^2(x)} = \frac{\int_0^x g(x)\,(f(x) - f(t))\,g(t)\,dt}{G^2(x)}$$

Παρατηρούμε ότι για $t \in [0, x]$ είναι $g(x)\,(f(x) - f(t))\,g(t) \geq 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $t = x$. Αυτό εξασφαλίζει ότι $R'(x) > 0$ και πάλι όπως πριν η R είναι γνησίως αύξουσα οπότε για $0 < x \leq 1$ είναι $R(x) \leq R(1)$. Άρα $R(x) \leq \frac{F(1)}{G(1)}$ και μάλιστα το ίσον θα ισχύει μόνο για $x = 1$. Βέβαια ο αναγνώστης ασφαλώς θα πρόσεξε ότι η παραπάνω απόδειξη εμπεριέχει και ένα επιχείρημα παρόμοιο με εκείνο που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του 4β. Εδώ αποδείξαμε το ερώτημα 4γ. αυτοτελώς χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το 4β. Η κρίσιμη σχέση ήταν

$$\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)' > 0 \tag{8}$$

Ας την δούμε ξανά:

$$\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)' > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{F'(x)\,G(x) - F(x)\,G'(x)}{G^2(x)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$F'(x)\,G(x) - F(x)\,G'(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$F'(x)\,G(x) > F(x)\,G'(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} > \frac{F(x)}{G(x)}$$

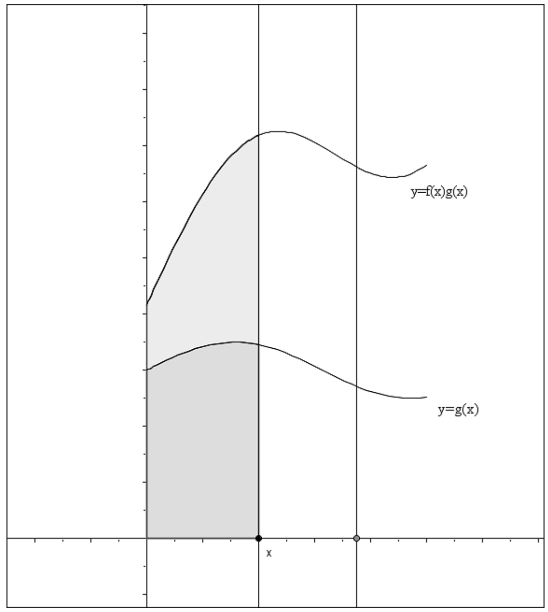
$$\frac{f(x)\,g(x)}{g(x)} > \frac{F(x)}{G(x)} \Leftrightarrow$$

$$f(x)\,G(x) > F(x)$$

Επομένως όχι μόνο το γ. μπορεί να προκύψει το β. αλλά εξ' ίσου καλά μπορεί κάποιος να αποδείξει πρώτα, αυτοτελώς, το γ. και μετά να αποδείξει το β.

4.3.4 Μία γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης (8)

Οι συναρτήσεις F G εκφράζουν όπως είδαμε εμβαδόν. Το πηλίκο των παραγώγων τους fg, g είναι η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f. Επειδή ο λόγος των συναρτήσεων fg, g το συσσωρευόμενο εμβαδόν αυξάνει:



4.4 Το Ερώτημα δ.

Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Άμεση εφαρμογή του κανόνα του De l' Hospital οδηγεί στην αναζήτηση του ορίου:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)\,g(x)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt\right)+2x\eta\mu x^4\left(\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt\right)}{g(x)\cdot x^5+5x^4\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)}$$

που είναι αρκετό για να αποθαρρύνει την περαιτέρω συνέχιση του εγχειρήματος. Η διάσπαση της συνάρτησης της οποίας ζητείται το όριο είναι επιβεβλημένη:

$$\frac{\left(\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)\cdot x^5}=\frac{\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\cdot\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}$$

Το πρώτο κομμάτι παρουσιάζει μία καλή συμπεριφορά:

- Αν το δεί κανείς ως $\frac{F(x)}{G(x)}$ συνάγει, στηριζόμενος στο ερώτημα β., ότι

$$0<\frac{\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}<f(x)$$

- Αν το δει κανείς ως ένα πηλίκο του οποίου έχει καθήκον να βρεί το όριο για $x\to 0^+$ τότε επειδή αποτελεί απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ θα βρεί

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)>0$$

Ο δεύτερος παράγοντας έχει ακόμη καλύτερη συμπεριφορά διότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}=_{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\eta\mu x^4}{5x^4}=_{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\eta\mu x^4}{5x^3} =_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\eta\mu x^4}{5x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{5}\cdot\frac{\eta\mu x^4}{x^4}\cdot x = \frac{2}{5}\cdot 1\cdot 0 = 0$$

Επομένως για να βρούμε το ζητούμενο όριο ή θα παρατηρήσουμε ότι

$$0 < \frac{\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\cdot\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5} < f(x)\cdot\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}$$

και θα συνάγουμε ότι το ζητούμενο όριο είναι 0 από το κριτήριο της παρεμβολής είτε θα καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα γράφοντας:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\cdot\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5} = f(0)\cdot 0 = 0$$

4.5 Ξανά στη δεύτερη λύση του γ.

Είδαμε ότι η καρδιά του θέματος είναι η σχέση (8). Τι Μαθηματικά όμως περιέχονται σε αυτό το ερώτημα; Για να τα δούμε καλύτερα ας ξεχάσουμε προς στιγμήν πως ορίσθηκαν οι F και G. Σίγουρα:

1. Είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε κάποιο διάστημα $[\alpha,\beta]$ (το ότι είχαμε $[0,1]$ δεν έπαιξε κάποιο ρόλο).

2. Στο α είναι ίσες με 0 και στα υπόλοιπα σημεία του $[\alpha,\beta]$ παίρνουν θετικές τιμές.

3. Οι παράγωγοι τους $F'(x)$, $G'(x)$ είναι συνεχείς και παίρνουν θετικές τιμές.

4. Το πηλίκο των παραγώγων τους είναι μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Αντιστρόφως αν έχουμε δύο συναρτήσεις F, G που ικανοποιούν τις υποθέσεις 1-4 τότε το πρόβλημα μπορεί να ανασυσταθεί αρκεί να ονομάσουμε:

1. $g(x) = G'(x)$

2. $f(x) = \frac{F'(x)}{G'(x)}$

Διότι τότε η G θα είναι η μοναδική παράγουσα της g που για $x = 0$ γίνεται 0 επομένως $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. Ακόμη $F'(x) = f(x)\,G'(x)$ δηλαδή $F'(x) = f(x)\,g(x)$ οπότε η F θα είναι η μοναδική παράγουσα της fg που στο 0 γίνεται 0 δηλαδή δεν είναι άλλη από την $F(x) = \int_0^x f(t)\,g(t)\,dt$.

Το κρίσιμο συμπέρασμα που προκύπτει από τα 1, 2, 3, 4 είναι ότι η $\frac{F(x)}{G(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως κάποιος λύνοντας το 4ο θέμα μεταξύ άλλων έχει αποδείξει και το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.1 *Έστω $F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ και $G : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $G(\alpha) = F(\alpha) = 0$ οι οποίες έχουν θετικές και συνεχείς παραγώγους. Αν η συνάρτηση $\frac{F'}{G'}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε και η συνάρτηση $\frac{F}{G}$ ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα.*

Το παραπάνω θεώρημα είναι ειδική περίπτωση του επομένου:

Θεώρημα 4.2 (**Ο κανόνας μονοτονίας τύπου[2] De l' Hospital**)
Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο (α,β) με $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Αν η συνάρτηση

$$\frac{f'}{g'}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β) τότε και η συνάρτηση

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Το Θεώρημα 4.2 το οποίο δυστυχώς δεν αναδεικνύεται στα βιβλία Απειροστικού Λογισμού μας επιτρέπει προκειμένου να βρούμε τη μονοτονία ενός πηλίκου να κάνουμε ότι κάνουμε και με τα όρια: Να καταφύγουμε στο πηλίκο των παραγώγων. Μπορούμε να δώσουμε μία αυτοτελή απόδειξη του Θεωρήματος 4.2. Όμως είναι προτιμότερο να αποδείξουμε προηγουμένως δύο ενδιάμεσα θεωρήματα διότι έτσι φαίνονται καλύτερα οι ιδέες της απόδειξης:

Θεώρημα 4.3 (**Το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy**)
Υποθέτομε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $[\alpha,\beta]$, είναι συνεχείς και επιπλέον είναι παραγωγίσιμες στο (α,β) με $g'(x)\neq 0$. Τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Απόδειξη: Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι αφού $g'(x)\neq 0$ στο (α,β) θα είναι $g(\beta)-g(\alpha)\neq 0$ (διαφορετικά με εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής καταλήγουμε σε άτοπο). Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=(f(\beta)-f(\alpha))\,g(x)-(g(\beta)-g(\alpha))\,f(x)$$

στο $[\alpha,\beta]$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Επιπλέον με λίγες πράξεις βρίσκουμε ότι $h(\alpha)=h(\beta)$. Το αποδεικτέο προκύπτει ως εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle. **ο.ε.δ.**

Θεώρημα 4.4 (**Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής του Darboux**)
Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ τότε η f' έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής δηλαδή κάθε τιμή μεταξύ δύο τιμών της f' είναι και αυτή τιμή της f'.

Απόδειξη: Έστω $y_1=f'(x_1)$ και $y_2=f'(x_2)$ δύο διαφορετικές τιμές της f'. Ασφαλώς θα είναι $x_1\neq x_2$ και το διάστημα με άκρα τα x_1,x_2 περιέχεται στο Δ. Έστω ακόμη c μία τιμή μεταξύ των y_1 και y_2. Θα δείξουμε ότι $f'(x)=c$ για κάποιο x μεταξύ των x_1,x_2. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-cx$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ. Είναι $g'(x)=f'(x)-c$

[2] Μολονότι μερικοί συγγραφείς τον ονομάζουν "Κανόνα μονοτονίας του De l' Hospital" δεν κατόρθωσα να βρώ μία σύνδεση του θεωρήματος με τον De l' Hospital γιαυτό προτίμησα αυτή την ονομασία που επίσης χρησιμοποιείται

και αφού το c είναι μεταξύ των y_1, y_2 οι τιμές $g'(x_1) = f'(x_1) - c = y_1 - c$ και $g'(x_2) = f'(x_2) - c = y_2 - c$ είναι ετερόσημες. Άρα κάποιο από τα όρια

$$\lim_{x \to x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} \qquad \lim_{x \to x_2} \frac{g(x) - g(x_2)}{x - x_2} \tag{9}$$

είναι θετικό και κάποιο αρνητικό. Θα υπάρχουν x_1' και x_2' μεταξύ των x_1, x_2 έτσι ώστε τα όρια (9) να είναι ομόσημα, αντιστοίχως, με τους αριθμούς:

$$\frac{g(x_1') - g(x_1)}{x_1' - x_1} \qquad \frac{g(x_2') - g(x_2)}{x_2' - x_2} \tag{10}$$

Άρα και οι αριθμοί (10) είναι ετερόσημοι δηλαδή:

$$\frac{(g(x_1') - g(x_1))(g(x_2') - g(x_2))}{(x_1' - x_1)(x_2' - x_2)} < 0 \tag{11}$$

Επειδη τα x_1', x_2' είναι μεταξύ των x_1, x_2 ο παρονομαστής του κλάσματος (11) είναι αρνητικός. Επομένως ο αριθμητής είναι θετικός. Αυτό σημαίνει ότι ή θα ισχύει

$$g(x_1') > g(x_1) \qquad g(x_2') > g(x_2) \tag{12}$$

είτε θα ισχύει:

$$g(x_1') < g(x_1) \qquad g(x_2') < g(x_2) \tag{13}$$

Η g ως συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα τα x_1, x_2 θα έχει μέγιστο και ελάχιστο. Αν ισχύουν οι (12) κανένα από τα $g(x_1), g(x_2)$ δεν αποτελεί μέγιστο της g άρα η μέγιστη τιμή της g θα παρουσιάζεται σε κάποιο σημείο ξ στο εσωτερικό του διαστήματος με άκρα τα x_1, x_2. Από το θεώρημα του Fermat θα ισχύει $g'(\xi) = 0$. Αν ισχύουν οι (13) τότε η ελάχιστη τιμή της g θα παρουσιάζεται σε κάποιο σημείο ξ στο εσωτερικό του διαστήματος με άκρα τα x_1, x_2. Πάλι από το θεώρημα του Fermat θα ισχύει $g'(\xi) = 0$. Σε κάθε περίπτωση θα υπάρχει ξ μεταξύ των x_1, x_2 έτσι ώστε $g'(\xi) = 0$. Όμως $g'(\xi) = f'(\xi) - c$. Άρα η παράγωγος της f στο ξ θα είναι ίση με c. **ο.ε.δ.**

Η Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2

Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)}$$

είναι γνησίως αύξουσα αρκεί να αποδείξουμε ότι η παράγωγος της είναι θετική. Έχουμε:

$$\left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)}\right)' = \frac{f'(x)(g(x) - g(\alpha)) - g'(x) f(x) - f(\alpha)}{(g(x) - g(\alpha))^2}$$

και επομένως

$$\left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)}\right)' = \frac{g'(x)(g(x) - g(\alpha))\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f(x) - f(\alpha)}{(g(x) - g(\alpha))}\right)}{(g(x) - g(\alpha))^2}$$

Παρατηρούμε ότι από το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, x)$ ώστε

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Στην παράσταση

$$\overbrace{g'(x)\left(g(x) - g(\alpha)\right)}^{T} \overbrace{\frac{\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f(x)-f(\alpha)}{(g(x)-g(\alpha))}\right)}{\left(g(x) - g(\alpha)\right)^2}}^{S}$$

το κλάσμα S είναι θετικό. Η απόδειξη θα έχει τελειώσει αν είναι και το T θετικό. Από το θεώρημα μέσης τιμής είναι

$$g(x) - g(\alpha) = (x - \alpha)\, g'(m)$$

και επομένως αφού το $x - \alpha$ είναι θετικό αρκεί το $g'(x)\, g'(m)$ να είναι θετικό. Αν ήταν αρνητικό τότε τα $g'(x)$, $g'(m)$ θα ήσαν ετερόσημα και επομένως από το θεώρημα του Darboux η παράγωγος θα έπρεπε να μηδενίζεται πράγμα αδύνατο. Άρα τελικά και το T είναι θετικό. **ο.ε.δ.**

Αναφορές

[1] G.D. Anderson, M.K. Vamanarthy και M. Vuorinen. *Inequalities for Quasiconformal Mappings in Space.* Pacific Journal of Mathematics, 160,1-18,1993.

[2] Michael J. Cloud και Byron C. Drachman. *Inequalities. With applications to Engineering.* Springer, 1998.

[3] Richard R. Goldberg. *Methods of Real Analysis.* Blaisdel, 1963.

[4] William R. Parzynski και Philip W. Zipse. *Introduction to Mathematical Analysis.* Mc Graw-Hill, 1982.

[5] Dan Pedoe. *Geometry. A Comprehencive Course.* Dover, 1988 (1970).

[6] Iosif Pinelis. *L'Hospital-Type Rules for Monotonicity: Include Them into Calculus Texts!* http://www.math.mtu.edu/ ipinelis/, χ.χ.

[7] Iosif Pinelis. *L'Hospital Rules for Monotonicity and the Wilker-Anglesio Inequality.* American Mathematical Monthly, 111, 905-909, 2004.

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Μονάδες 8

Α.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α.3 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx > 0$.

Μονάδες 2

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Μονάδες 2

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Μονάδες 2

ε. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i} \qquad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 9

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$$

για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$$

για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3º

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 3

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,g(t)\,dt\,, \qquad x \in [0,\ 1],$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt\,, \qquad x \in [0,\ 1].$$

α. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Μονάδες 8

β. Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x) \cdot G(x) > F(x)$$

για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Μονάδες 6

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Μονάδες 4

δ. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2\,dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\,dt\right) \cdot x^5}\ .$$

Μονάδες 7