Μονοτονία –Ακρότατα Συναρτήσεων

ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

 Μίλτος Παπαγρηγοράκης

 Ε.Μ.Ε. - Παράρτημα Χανίων

 *Η συμπεριφορά των τιμών μιας συνάρτησης ως προς τι διάταξη, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή διατρέχει το πεδίο ορισμού της ή ένα διάστημα, μας δίνουν σημαντικές πληροφορίες για την ίδια τη συνάρτηση*

 *Η* ***μονοτονία*** *μιας* [*συνάρτησης*](https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A3%CF%85%CE%BD%CE%AC%CF%81%CF%84%CE%B7%CF%83%CE%B7) *αναφέρεται ποιοτικά στην κατεύθυνση της μεταβολής των τιμών της. Για παράδειγμα, έστω ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης αυξάνεται, η μονοτονία είναι η πληροφορία που αναφέρει αν η εξαρτημένη μεταβλητή αυξάνεται και αυτή ή μειώνεται ή μένει αμετάβλητη.*

 *Τα* ***ακρότατα*** *μιας συνάρτησης αναφέρονται στις ακραίες τιμές της συνάρτησης εφόσον υπάρχουν. Είναι η μεγαλύτερη ή η μικρότερη τιμή που ενδέχεται να έχει μία συνάρτηση όταν το x διατρέχει το πεδίο ορισμού της.*

**ΣΧΟΛΙΑ**

 Η µονοτονία µιας συνάρτησης αναφέρεται σε διαστήµατα του πεδίου ορισµού της. πχ η  είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα  και 

 Η μονοτονία μιας συνάρτησης μπορεί να προκύψει από το πρόσημο του λόγου μεταβολής:

 Αν για οποιαδήποτε  με είναι  (αντ. λ<0) τότε η  είναι γνησίως αύξουσα (αντ. φθίνουσα) στο 

 Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και σε κάποιο εσωτερικό σημείο  μηδενίζεται, τότε εκατέρωθεν του σημείου θα αλλάζει πρόσημο. Μπορούμε να βρούμε το πρόσημό της χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μονοτονίας.

 Μια συνάρτηση ΔΕΝ είναι γνησίως αύξουσα (αντ. φθίνουσα) αν και μόνο αν ΥΠΑΡΧΟΥΝ  ώστε να ισχύει  (αντ. )

• Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  παρουσιάζει ελάχιστο (αντ. μέγιστο ) το  πρέπει και αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει  ώστε  και ότι  (αντ. ) για κάθε 

• Μόνο από τη σχέση  για κάθε  ΔΕΝ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το  είναι ελάχιστο της  ή ότι το  είναι μέγιστό της.

-----\*\*\*-----

*Οι προτάσεις που ακολουθούν είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την επίλυση ανισώσεων ή την απόδειξη ανισοτήτων*

***ΠΡΟΤΑΣΗ 1* Έστω , γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Για οποιαδήποτε  ισχύει ότι: **

Απόδειξη:

 Η συνεπαγωγή  προκύπτει από τον ορισμό της γν. αύξουσας συνάρτησης

 Θα αποδείξουμε τη συνεπαγωγή  με την εις άτοπον απαγωγή:

 Αν  τότε επειδή η  είναι γνησίως αύξουσα θα είχαμε  που είναι άτοπο

 Αν  τότε επειδή η  είναι συνάρτηση θα είχαμε  που είναι άτοπο .
 Επομένως είναι 

Όμοια αποδεικνύεται η *ΠΡΟΤΑΣΗ:* Αν η  γνησίως φθίνουσα τότε για οποιαδήποτε  ισχύει ότι: 

***ΠΡΟΤΑΣΗ 2* Έστω , γνησίως μονότονη συνάρτηση. Για οποιαδήποτε  ισχύει ότι: **

Απόδειξη

Για οποιαδήποτε  :

• Η συνεπαγωγή  είναι αληθής επειδή η  είναι συνάρτηση.

• Θα αποδείξουμε τη συνεπαγωγή  με την εις άτοπον Απαγωγή.

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει ότι  τότε έχουμε ότι:

 •  που είναι άτοπο.

 •  που είναι άτοπο.

Επομένως για οποιαδήποτε  ισχύει η ισοδυναμία 

**Άσκηση 1**

**Α) Αποδείξτε τη μονοτονία της συνάρτησης. , **

**Β) Να αποδειχτεί ότι  (1) για κάθε **

Λύση

Α) • Για κάθε  με  έχουμε ότι 




• Για κάθε  με  έχουμε αντίστοιχα ότι:  

 Άρα η  είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα  και 

Β) Για κάθε  είναι  επομένως ****

**Άσκηση 2**

**Έστω συνάρτηση  τέτοια ώστε η συνάρτηση  με  να είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι η  είναι γνησίως φθίνουσα**

Λύση

Εδώ η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Θα μπορούσε να γίνει με χρήση «βοηθητικής συνάρτησης» όπως κάνουμε σε επόμενη άσκηση.

Υποθέτουμε ότι η  δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο . Τότε υπάρχουν με  και  και θα έχουμε ότι



Που είναι άτοπο. Επομένως η  είναι γνησίως φθίνουσα στο .

**Άσκηση 3**

## Η συνάρτηση  είναι γνησίως αύξουσα στο  και για κάθε ισχύει ότι:  (1). Να αποδείξετε ότι , για κάθε

Απόδειξη:

Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση που να επαληθεύει την (1). Τότε είναι 

Θεωρούμε τη συνάρτηση   που είναι γνησίως αύξουσα (απόδειξη με τον ορισμό).

Τότε έχουμε:  που επαληθεύει την (1)

**Άσκηση 4**

**Δίνεται ότι η συνάρτηση  είναι γνησίως αύξουσα στο . Να αποδείξετε τη μονοτονία της συνάρτησης  στο **

Λύση:

• Για κάθε  με  έχουμε

Επομένως η  είναι γνησίως αύξουσα στο 

**Άσκηση 5**

## Αν η συνάρτηση   είναι γνησίως αύξουσα, να βρείτε τις τιμές του Λύση

Με χρήση του προσήμου του λόγου μεταβολής έχουμε ότι: επειδή η  είναι γνησίως αύξουσα , για οποιαδήποτε  ισχύει 

**Άσκηση 6**

**Έστω συνάρτηση  ορισμένη στο , ώστε για κάθε  ναισχύει . Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  είναι γνησίως φθίνουσα στο  και ότι η  είναι γνησίως αύξουσα στο .**

Λύση

Για κάθε  ισχύει ότι:



Για κάθε  ισχύει



Άρα η  είναι γνησίως φθίνουσα.

Αντίστοιχα εργαζόμαστε για την 

**Άσκηση 7**

**Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση ,  παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο.**

Λύση

Για κάθε  έχουμε ότι



Παρατηρούμε ότι  και ότι 

Οπότε η (1) γράφεται: 

Συνεπώς η  παρουσιάζει ελάχιστο όταν  το  και μέγιστο όταν  το .

**Άσκηση 8**

**Α) Έστω η συνάρτηση  με . Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της  είναι το 
Β) Να λυθεί ως προς α και β η ανίσωση **

Απόδειξη

Επειδή ισχύει ότι 



 η συνάρτηση γίνεται: 

• Γνωρίζουμε ότι για κάθε  ισχύει ότι:  , με την ισότητα να ισχύει μόνο αν 

Οπότε για  παίρνουμε ότι  με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν 

που επαληθεύει την 

Αποδείξαμε ότι  .

Επομένως η συνάρτηση  παρουσιάζει ελάχιστο μόνο όταν  το 

**B)** Επειδή η  παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο στο 0 το 2, για κάθε  θα ισχύει ότι  με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν . Συνεπώς :

Ισχύει ότι  με το ίσον να ισχύει μόνο όταν 

Καθώς και  με το ίσον να ισχύει μόνο όταν .

Επομένως ισχύει ότι  με το ίσον να αληθεύει μόνο όταν 

Επομένως η ανίσωση είναι αληθής μόνο όταν η ισότητα είναι αληθής και αυτό συμβαίνει μόνο όταν  και 

**Άσκηση 9**

**Έστω η συνάρτηση  και η συνάρτηση  η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο .
Α) Αποδείξτε ότι η  είναι γνησίως φθίνουσα.
Β) Να λυθεί στο**   **η εξίσωση 
Γ) Να αποδειχτεί ότι για κάθε  ισχύει ότι **

Λύση:

Α) Για κάθε  με  έχουμε:



άρα η  είναι γνησίως φθίνουσα στο ****.
Β) Για  η ισότητα είναι αληθής.

Για κάθε  έχουμε ότι:




και




Άρα μοναδική ρίζα είναι το 

Γ) Επειδή 

Και

 

Έχουμε ότι:

 και

 με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε ότι ****

**Άσκηση 10**

**Αν  , , τότε:
Α) Να αποδείξετε ότι η  είναι γνησίως αύξουσα
B) Nα βρείτε το πρόσημο της 
Γ) Να λύσετε την ανίσωση 
Δ) Να λυθεί η ανίσωση  (1)**

Λύση

Α) Για οποιαδήποτε  ισχύει ότι:


Β) Για το πρόσημο της  έχουμε ότι είναι:

• 

• 

• 

Γ) Για την ανίσωση έχουμε ότι:



Δ) Ισοδύναμα έχουμε:



Θεωρούμε τη συνάρτηση ,  η οποία είναι γνησίως αύξουσα αφού για οποιαδήποτε  με  ισχύει ότι:



Τότε η ανίσωση (2) γίνεται:



που είναι οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης (1)

**Άσκηση 11**

**Έστω συνάρτηση  για την οποία ισχύει ότι  (1), για κάθε . Να αποδειχτεί ότι η  είναι γνησίως αύξουσα, να βρείτε το  το  και το πρόσημο της .**

Λύση:
Θεωρούμε τη συνάρτηση  που είναι γνησίως αύξουσα (απόδειξη εύκολη με τον ορισμό)

Τότε για κάθε  έχουμε ότι:



(αφού η είναι γνησίως αύξουσα), επομένως η είναι γνησίως αύξουσα.

Για την εύρεση του , θέτουμε στη σχέση (1) όπου  και παίρνουμε:



Για την εύρεση του , θέτουμε στην (1)  και παίρνουμε:



Το πρόσημο της  μπορεί να προκύψει είτε αλγεβρικά:
• Η  οπότε:  και 

Είτε με αξιοποίηση της μονοτονίας της συνάρτησης :

• 

και 

**Άσκηση 12**

**Έστω συνάρτηση** ** και η συνάρτηση  που είναι γνησίως μονότονη η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  και  και έχει σύνολο τιμών το 
Α Να αποδείξετε ότι η  είναι γνησίως αύξουσα
Β Να αποδείξετε ότι η  είναι γνησίως αύξουσα.
Γ Να λυθεί η εξίσωση 
Δ Να λυθεί η ανίσωση 
Ε Να βρείτε το πρόσημο της **

Λύση:
Α) Για οποιαδήποτε  με  ισχύει ότι:



Άρα η  είναι γνησίως αύξουσα στο R

B) Έστω ότι η  δεν είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Επειδή είναι γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Τότε για οποιαδήποτε  έχουμε ότι



και για  θα έχουμε ότι:



που είναι άτοπο. Άρα η  είναι γνησίως αύξουσα στο 

Γ) Ισοδύναμα παίρνουμε ότι:

Δ) Ισοδύναμα έχουμε ότι



Ε) Για το πρόσημο της  έχουμε:

 και 

Το πρόσημο της  φαίνεται στον πίνακα:

1

+∞

-∞

f(x)

+

0

-

**Άσκηση 13**

**Δίνεται η συνάρτηση  για την οποία ισχύει ότι  για κάθε . Βρείτε τη μονοτονία και τον τύπο της συνάρτησης **

Λύση

Ισοδύναμα έχουμε ότι



Θεωρούμε τη συνάρτηση ,  η οποία είναι γνησίως αύξουσα (απόδειξη εύκολη με τον ορισμό)

Για τη μονοτονία της  έχουμε ότι για οποιαδήποτε  με  ισχύει ότι:



Επομένως η συνάρτηση  είναι γνησίως φθίνουσα

Για την εύρεση του τύπου της  από την (1) παίρνουμε ότι για κάθε  έχουμε: 

**Άσκηση 14**

**Έστω συνάρτηση  με την ιδιότητα: , για κάθε . Δίνεται ακόμα ότι για κάθε  ισχύει η ισοδυναμία: «».**

**Α) να αποδείξετε ότι:
α) 
β) Ισχύει  για κάθε 
γ) Η  είναι γνησίως αύξουσα
δ) Για κάθε  ισχύει ότι **

**Β) να λυθεί η εξίσωση **

Λύση

Αα) Από τη σχέση  για  βρίσκουμε ότι 

β) Στην  θέτουμε  και παίρνουμε .

γ) Για οποιαδήποτε  με ισχύει:



επομένως η  είναι γνησίως αύξουσα στο 

δ) Για κάθε  έχουμε ότι:



Β) Ισοδύναμα έχουμε ότι



**Άσκηση 15**

**Έστω η συνάρτηση  με 
Α) Να αποδείξετε ότι η  παρουσιάζει ελάχιστο
Β) Αποδείξτε την ανισότητα  για κάθε **

Λύση

Α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  είναι το 

Για κάθε  ισχύει ότι

 και επειδή  έχουμε ότι  για κάθε , συνεπώς η  παρουσιάζει ελάχιστο στο  το 
Β) Από το Α ερώτημα έχουμε ότι , από όπου προκύπτει :

Για  ότι   (1).

Για  παίρνουμε  (2)

και για  ότι  (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) έχουμε ότι 