Μονοτονία –Ακρότατα Συναρτήσεων

Μίλτος Παπαγρηγοράκης

Ε.Μ.Ε. - Παράρτημα Χανίων

Η συμπεριφορά των τιμών μιας συνάρτησης ως προς τι διάταξη, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή διατρέχει το πεδίο ορισμού της ή ένα διάστημα, μας δίνουν σημαντικές πληροφορίες για την ίδια τη συνάρτηση

*Η **μονοτονία** μιας συνάρτησης αναφέρεται ποιοτικά στην κατεύθυνση της μεταβολής των τιμών της. Για παράδειγμα, έστω ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης αυξάνεται, η μονοτονία είναι η πληροφορία που αναφέρει αν η εξαρτημένη μεταβλητή αυξάνεται και αυτή ή μειώνεται ή μένει αμετάβλητη.*

*Τα **ακρότατα** μιας συνάρτησης αναφέρονται στις ακραίες τιμές της συνάρτησης εφόσον υπάρχουν. Είναι η μεγαλύτερη ή η μικρότερη τιμή που ενδέχεται να έχει μία συνάρτηση όταν το x διατρέχει το πεδίο ορισμού της.*

ΣΧΟΛΙΑ

- Η μονοτονία μιας συνάρτησης αναφέρεται σε διαστήματα του πεδίου ορισμού της. πχ η $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$
- Η μονοτονία μιας συνάρτησης μπορεί να προκύψει από το πρόσημο του λόγου μεταβολής:

  Αν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ με $x_1,\neq x_2$ είναι $\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ (αντ. λ<0) τότε η f είναι γνησίως αύξουσα (αντ. φθίνουσα) στο A
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και σε κάποιο εσωτερικό σημείο $x_o\in\Delta$ μηδενίζεται, τότε εκατέρωθεν του σημείου x_o θα αλλάζει πρόσημο. Μπορούμε να βρούμε το πρόσημό της χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μονοτονίας.
- Μια συνάρτηση ΔΕΝ είναι γνησίως αύξουσα (αντ. φθίνουσα) αν και μόνο αν ΥΠΑΡΧΟΥΝ $x_1,x_2\in D_f$ ώστε να ισχύει $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$ (αντ. $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$)
- Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο (αντ. μέγιστο) το $\kappa\in R$ πρέπει και αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0\in D_f$ ώστε $f(x_0)=\kappa$ και ότι $f(x)\geq\kappa$ (αντ. $f(x)\leq\kappa$) για κάθε $x\in D_f$
- Μόνο από τη σχέση $m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in A_f$ ΔΕΝ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το m είναι ελάχιστο της f ή ότι το M είναι μέγιστό της.

-----***-----

<u>Οι προτάσεις που ακολουθούν είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την επίλυση ανισώσεων ή την απόδειξη ανισοτήτων</u>

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 1</u> **Έστω $f:A\to R$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in D_f$ ισχύει ότι:**

$f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2$

Απόδειξη:

- Η συνεπαγωγή $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ προκύπτει από τον ορισμό της γν. αύξουσας συνάρτησης
- Θα αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow x_1<x_2$ με την εις άτοπον απαγωγή:

  Αν $x_1>x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα είχαμε $f(x_1)>f(x_2)$ που είναι άτοπο

  Αν $x_1=x_2$ τότε επειδή η f είναι συνάρτηση θα είχαμε $f(x_1)=f(x_2)$ που είναι άτοπο .

  Επομένως είναι $x_1<x_2$

Όμοια αποδεικνύεται η *<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u>* Αν η $f:A\to R$ γνησίως φθίνουσα τότε για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει ότι: $f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 2</u> **Έστω $f:A\to R$, γνησίως μονότονη συνάρτηση. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in D_f$ ισχύει ότι:**

$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$

Απόδειξη

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$:

- Η συνεπαγωγή $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ είναι αληθής επειδή η f είναι συνάρτηση.
- Θα αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ με την εις άτοπον Απαγωγή.

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει ότι $x_1 = x_2$ τότε έχουμε ότι:

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ που είναι άτοπο.
- $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ που είναι άτοπο.

Επομένως για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Άσκηση 1

A) Αποδείξτε τη μονοτονία της συνάρτησης.

$$f(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{x},\ x \in (-\infty, 0) \cup (0,1)$$

B) Να αποδειχτεί ότι $f(2x) - x > f(x)$ **(1) για κάθε** $x \in (-\infty, 0)$

Λύση

A) • Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε ότι $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} -x_1 > -x_2 \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x_1 > 1-x_2 \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x_1} + \frac{1}{x_1} > \sqrt{1-x_2} + \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

• Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε αντίστοιχα ότι: $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} -x_1 > -x_2 \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$$\sqrt{1-x_1} + \frac{1}{x_1} > \sqrt{1-x_2} + \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0,1)$

B) Για κάθε $x < 0$ είναι

$2x < x \Rightarrow f(2x) > f(x) \Rightarrow f(2x) - f(x) > 0$ επομένως

$f(2x) - f(x) > x \Leftrightarrow f(2x) - x > f(x)$

Άσκηση 2

Έστω συνάρτηση $f : R \to (0, +\infty)$ **τέτοια ώστε η συνάρτηση** h **με** $h(x) = \dfrac{1}{f(x)} - f^3(x) + 2$ **να είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι η** f **είναι γνησίως φθίνουσα**

Λύση

Εδώ η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Θα μπορούσε να γίνει με χρήση «βοηθητικής συνάρτησης» όπως κάνουμε σε επόμενη άσκηση.

Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \le f(x_2)$ και θα έχουμε ότι

$$f(x_1) \le f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{f(x_1)} \ge \dfrac{1}{f(x_2)} \\ -f^3(x_1) \ge -f^3(x_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f(x_1)} - f^3(x_1) + 2 \ge \frac{1}{f(x_2)} - f^3(x_2) + 2 \Rightarrow$$

$$h(x_1) \ge h(x_2) \Rightarrow x_1 \ge x_2$$

Που είναι άτοπο. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Άσκηση 3

Η συνάρτηση f **είναι γνησίως αύξουσα στο** R **και για κάθε** $x \in R$ **ισχύει ότι:** $f(f(x)) = x$ **(1).**

Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$**, για κάθε** $x \in R$

Απόδειξη:

Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση που να επαληθεύει την (1). Τότε είναι

$f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(f(x)) + f(x) = f(x) + x$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x \quad x \in R$ που είναι γνησίως αύξουσα (απόδειξη με τον ορισμό).

Τότε έχουμε: $(1) \Leftrightarrow h(f(x)) = h(x) \Leftrightarrow f(x) = x$ που επαληθεύει την (1)

Άσκηση 4

Δίνεται ότι η συνάρτηση f **είναι γνησίως αύξουσα στο** R**. Να αποδείξετε τη μονοτονία της συνάρτησης**

$h(x) = f(x) - f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **στο** $(-\infty, 0)$

Λύση:

- Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ f\left(\dfrac{1}{x_1}\right) > f\left(\dfrac{1}{x_2}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ -f\left(\dfrac{1}{x_1}\right) < -f\left(\dfrac{1}{x_2}\right) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) - f\left(\dfrac{1}{x_1}\right) < f(x_2) - f\left(\dfrac{1}{x_2}\right)$$

$$\Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$

Άσκηση 5

Αν η συνάρτηση $f(x) = (1-|\alpha|)x + 1 \quad x \in R$ είναι γνησίως αύξουσα, να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$

Λύση

Με χρήση του προσήμου του λόγου μεταβολής έχουμε ότι: επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα , για οποιαδήποτε $x_1 \neq x_2 \in R$ ισχύει

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(1-|\alpha|)x_1 + 1 - (1-|\alpha|)x_2 - 1}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(1-|\alpha|)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow |\alpha| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 1$$

Άσκηση 6

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R, ώστε για κάθε $x \neq y \in R$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < 3|x - y|$.

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R και ότι η $h(x) = f(x) + 3x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Λύση

Για κάθε $x \neq y \in R$ ισχύει ότι:

$$|f(x) - f(y)| < 3|x - y| \Leftrightarrow \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| < 3 \Leftrightarrow$$

$$-3 < \frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 3 \qquad (1)$$

Για κάθε $x_1 \neq x_2 \in R$ ισχύει

$$\lambda = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1) - 3x_1 - f(x_2) + 3x_2}{x_1 - x_2} =$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - 3 < 0 \qquad \text{Λόγω της (1)}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Αντίστοιχα εργαζόμαστε για την h

Άσκηση 7

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{2 - x}$, $x \in [1, 2]$ παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο.

Λύση

Για κάθε $x \in [1, 2]$ έχουμε ότι

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{1} \\ -2 \leq -x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{x} \leq 1 \\ 0 \leq 2 - x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{x} \leq 1 \\ 0 \leq \sqrt{2 - x} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} + \sqrt{2 - x} \leq 2 \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι $f(2) = \dfrac{1}{2}$ και ότι $f(1) = 2$

Οπότε η (1) γράφεται: $f(2) \leq f(x) \leq f(1)$

Συνεπώς η f παρουσιάζει ελάχιστο όταν $x = 2$ το $f(2) = \dfrac{1}{2}$ και μέγιστο όταν $x = 1$ το $f(1) = 2$.

Άσκηση 8

Α) Έστω η συνάρτηση

$f(x) = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^3 + \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)^3$ με $x \in R$. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το 2

Β) Να λυθεί ως προς α και β η ανίσωση

$$f(\alpha + \beta - 3) + f(\alpha - \beta - 1) - 4 \leq 0$$

Απόδειξη

Επειδή ισχύει ότι $\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)^3 =$

$$\left(\frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right)^3 = \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^3}$$

η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^3 + \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^3}$$

- Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει ότι:

$(\alpha - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\alpha = 1$

Οπότε για $\alpha = \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3$ παίρνουμε ότι $f(x) \geq 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν

$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3 = 1 \Rightarrow x+\sqrt{x^2+1} = 1 \Rightarrow$

$\sqrt{x^2+1} = 1-x \Rightarrow x^2+1 = 1-2x+x^2 \Rightarrow x = 0$

που επαληθεύει την $f(x) = 2$

Αποδείξαμε ότι $f(x) \geq f(0)$.

Επομένως η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο όταν $x=0$ το $f(0)=2$

B) Επειδή η f παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο στο 0 το 2, για κάθε $x \in R$ θα ισχύει ότι $f(x) \geq 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=0$. Συνεπώς :

Ισχύει ότι $f(\alpha+\beta-3) \geq 2$ με το ίσον να ισχύει μόνο όταν $\alpha+\beta-3=0$

Καθώς και $f(\alpha-\beta-1) \geq 2$ με το ίσον να ισχύει μόνο όταν $\alpha-\beta-1=0$.

Επομένως ισχύει ότι $f(\alpha+\beta-3)+f(\alpha-\beta-1) \geq 4$ με το ίσον να αληθεύει μόνο όταν $\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha-\beta=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}$

Επομένως η ανίσωση είναι αληθής μόνο όταν η ισότητα είναι αληθής και αυτό συμβαίνει μόνο όταν $\alpha=2$ και $\beta=1$

Άσκηση 9

Έστω η συνάρτηση $f:(-2,+\infty) \to (0,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=(x+2)f(x)-1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-2,+\infty)$.

A) **Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.**

B) **Να λυθεί στο $(0,+\infty)$ η εξίσωση**

$f(x)+f\left(x^7\right)=f\left(x^5\right)+f\left(x^9\right)$

Γ) **Να αποδειχτεί ότι για κάθε $x>1$ ισχύει ότι**

$f\left(x-2\sqrt{x}\right)+f\left(x^2-x\right)<2f(-1)$

Λύση:

A) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases}g(x_1)>g(x_2)\\ x_1+2<x_2+2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}g(x_1)+1>g(x_2)+1\\ \dfrac{1}{x_1+2}>\dfrac{1}{x_2+2}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{g(x_1)+1}{x_1+2}>\frac{g(x_2)+1}{x_2+2} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-2,+\infty)$.

B) Για $x=1$ η ισότητα είναι αληθής.

Για κάθε $x \neq 1$ έχουμε ότι:

$$0<x<1 \Rightarrow \begin{cases}x>x^5\\ x^7>x^9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f(x)<f\left(x^5\right)\\ f\left(x^7\right)<f\left(x^9\right)\end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)+f\left(x^7\right)<f\left(x^5\right)+f\left(x^9\right)$$

και

$$x>1 \Rightarrow \begin{cases}x<x^5\\ x^7<x^9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f(x)>f\left(x^5\right)\\ f\left(x^7\right)>f\left(x^9\right)\end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)+f\left(x^7\right)>f\left(x^5\right)+f\left(x^9\right)$$

Άρα μοναδική ρίζα είναι το 1

Γ) Επειδή $x-2\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0$

Και

$$x^2-x+1=\frac{1}{2}\left(x^2+x^2+2x+1+1\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(x^2+(x+1)^2+1\right)>0$$

Έχουμε ότι:

$x-2\sqrt{x} \geq -1 \Rightarrow f\left(x-2\sqrt{x}\right) \leq f(-1)$ και

$x^2-x>-1 \Leftrightarrow f\left(x^2-x\right)<f(-1)$ με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε ότι $f\left(x-2\sqrt{x}\right)+f\left(x^2-x\right)<2f(-1)$

Άσκηση 10

Αν $f(x)=x^5+3x-4$, $x \in R$, τότε:

A) **Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα**

B) **Να βρείτε το πρόσημο της f**

Γ) **Να λύσετε την ανίσωση**

$$\left(x^5+x\right)^5-(4-2x)^5>-3x^5-9x+12$$

Δ) **Να λυθεί η ανίσωση**

$f\left(x^2+x\right)-f(2x)<x-x^2$ **(1)**

Λύση

Α) Για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in R$ ισχύει ότι:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^5<x_2^5 \\ 3x_1<3x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1^5+3x_1-4<x_2^5+3x_2-4 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Β) Για το πρόσημο της f έχουμε ότι είναι:

- $f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(1) \Leftrightarrow x=1$
- $f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(1) \Leftrightarrow x>1$
- $f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(1) \Leftrightarrow x<1$

Γ) Για την ανίσωση έχουμε ότι:

$$\left(x^5+x\right)^5-(4-2x)^5>-3x^5-9x+12 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^5+x\right)^5+3\left(x^5+x\right)-4>$$
$$(4-2x)^5+3(4-2x)-4 \Leftrightarrow$$
$$f\left(x^5+x\right)>f(4-2x) \Leftrightarrow x^5+x>4-2x \Leftrightarrow$$
$$x^5+3x-4>0 \Leftrightarrow$$
$$f(x)>f(1) \Leftrightarrow x>1$$

Δ) Ισοδύναμα έχουμε:

$$f\left(x^2+x\right)-f(2x)<x-x^2 \Leftrightarrow$$
$$f\left(x^2+x\right)+(x^2+x)<f(2x)+2x \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x,\ x\in R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα αφού για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1)<f(x_2) \\ -x_1<-x_2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2 \Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Τότε η ανίσωση (2) γίνεται:

$$(2) \Leftrightarrow h\left(x^2+x\right)<h(2x) \Leftrightarrow x^2+x<2x \Leftrightarrow$$
$$x^2-x<0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$$

που είναι οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης (1)

Άσκηση 11

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f^5(x)+f(x)=2x^5$ (1), για κάθε $x\in R$. Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, να βρείτε το $f(0)$ το $f(1)$ και το πρόσημο της f.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^5+x,\ x\in R$ που είναι γνησίως αύξουσα (απόδειξη εύκολη με τον ορισμό)

Τότε για κάθε $x_1,x_2\in R$ έχουμε ότι:

$$x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1^5<2x_2^5 \Rightarrow$$
$$f^5(x_1)+f(x_1)<f^5(x_2)+f(x_2) \Rightarrow$$
$$h(f(x_1))<h(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

(αφού η h είναι γνησίως αύξουσα), επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για την εύρεση του $f(1)$, θέτουμε στη σχέση (1) όπου $x=1$ και παίρνουμε:

$$f^5(1)+f(1)=2 \Leftrightarrow h(f(1))=h(1) \Leftrightarrow f(1)=1$$

Για την εύρεση του $f(0)$, θέτουμε στην (1) $x=0$ και παίρνουμε:

$$f^5(0)+f(0)=0^5 \Leftrightarrow f(0)\left(f^4(0)+1\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$$

Το πρόσημο της f μπορεί να προκύψει είτε αλγεβρικά:

- Η $(1) \Leftrightarrow f(x)\left(f^4(x)+1\right)=x^5$ οπότε:

$x>0 \Rightarrow f(x)>0$ και $x<0 \Rightarrow f(x)<0$

Είτε με αξιοποίηση της μονοτονίας της συνάρτησης f:

- $x<0 \Rightarrow f(x)<f(0) \Rightarrow f(x)<0$

και $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>0$

Άσκηση 12

Έστω συνάρτηση $h(x)=x^3+x,\ x\in R$ και η συνάρτηση $f:R\to R$ που είναι γνησίως μονότονη η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2,0)$ και $B(3,9)$ και έχει σύνολο τιμών το R

Α **Να αποδείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα**

Β **Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.**

Γ **Να λυθεί η εξίσωση $f(3+f(x^6+x^2))=9$**

Δ **Να λυθεί η ανίσωση $f(3+f(x^6+x^2))<9$**

Ε **Να βρείτε το πρόσημο της f**

Λύση:

Α) Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1^3 < x_2^3 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_1^3 < x_2 + x_2^3 \Rightarrow$$
$$h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο R

Β) Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Επειδή είναι γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in R$ έχουμε ότι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

και για $x_1 = 2,\ x_2 = 3$ θα έχουμε ότι:

$$2 < 3 \Rightarrow f(2) > f(3) \Rightarrow 0 > 9$$

που είναι άτοπο. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Γ) Ισοδύναμα παίρνουμε ότι:

$$f(3+f(x^6+x^2)) = 9 \Leftrightarrow f(3+f(x^6+x^2)) = f(3) \Leftrightarrow$$
$$3+f(x^6+x^2) = 3 \Leftrightarrow f(x^6+x^2) = f(2) \Leftrightarrow$$
$$x^6+x^2 = 2 \Leftrightarrow h(x^2) = h(1) \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$$

Δ) Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$f(3+f(x^6+x^2)) < 9 \Leftrightarrow f(3+f(x^6+x^2)) < f(3) \Leftrightarrow$$
$$3+f(x^6+x^2) < 3 \Leftrightarrow f(x^6+x^2) < f(2) \Leftrightarrow$$
$$x^6+x^2 < 2 \Leftrightarrow h(x^2) < h(1) \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$$

Ε) Για το πρόσημο της f έχουμε:

$x > 2 \Rightarrow f(x) > f(2) \Rightarrow f(x) > 0$ και

$x < 2 \Rightarrow f(x) < f(2) \Rightarrow f(x) < 0$

Το πρόσημο της f φαίνεται στον πίνακα:

	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	-	0	+

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)+f^3(x)+x^3+x^9=0$ για κάθε $x \in R$.

Βρείτε τη μονοτονία και τον τύπο της συνάρτησης f

Λύση

Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$f(x)+f^3(x)+x^3+x^9=0 \Leftrightarrow$$
$$f(x)+f^3(x) = -x^3-x^9$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x + x^3$, $x \in R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα (απόδειξη εύκολη με τον ορισμό)

Για τη μονοτονία της f έχουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^9 \Rightarrow h(-x_1^3) > h(-x_2^9) \Rightarrow$$
$$h(f(x_1)) > h(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα

Για την εύρεση του τύπου της f από την (1) παίρνουμε ότι για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f(x)+f^3(x)+x^3+x^9=0 \Leftrightarrow$$
$$f(x)+f^3(x) = -x^3-x^9 \Leftrightarrow$$
$$h(f(x)) = h(-x^3) \Leftrightarrow f(x) = -x^3$$

Άσκηση 14

Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ με την ιδιότητα:

$f(x+y) = f(x)+f(y)$, για κάθε $x, y \in R$. Δίνεται ακόμα ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει η ισοδυναμία: « $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$».

Α) να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 0$

β) **Ισχύει $f(-x)+f(x) = 0$ για κάθε $x \in R$**

γ) **Η f είναι γνησίως αύξουσα**

δ) **Για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει ότι**

$$f(\sqrt{x})+f(x^2) > f(x)+f(x^3)$$

Β) **να λυθεί η εξίσωση**

$$f(2x^2+2016)+f(2x^2-2016) = 2f(2|x|-1)$$

Λύση

Αα) Από τη σχέση $f(x+y) = f(x)+f(y)$ για $x = y = 0$ βρίσκουμε ότι $f(0) = 0$

β) Στην (1) θέτουμε $y = -x$ και παίρνουμε

$$f(x-x) = f(x)+f(-x) \Rightarrow f(0) = f(x)+f(-x) \Rightarrow$$
$$f(-x) = -f(x)$$

γ) Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow$$
$$f(x_2 + (-x_1)) > 0 \Leftrightarrow f(x_2) + f(-x_1) > 0 \Leftrightarrow$$
$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

δ) Για κάθε $x \in (0,1)$ έχουμε ότι:

$$0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > x \\ x^2 > x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\sqrt{x}) > f(x) \\ f(x^2) > f(x^3) \end{cases} \Rightarrow$$
$$f(\sqrt{x}) + f(x^2) > f(x) + f(x^3)$$

Β) Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$f(x^2 + 2016) + f(x^2 - 2016) = 2f(2|x| - 1) \Leftrightarrow$$
$$f(x^2 + 2016) + f(x^2 - 2016) = f(2|x| - 1) + f(2|x| - 1) \Leftrightarrow$$
$$f(2x^2) = f(4|x| - 2) \Leftrightarrow 2x^2 = 4|x| - 2 \Leftrightarrow$$
$$|x|^2 - 2|x| + 1 = 0 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow |x| - 1 \Leftrightarrow$$
$$x = -1 \text{ ή } x = 1$$

Άσκηση 15

Έστω η συνάρτηση f **με** $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

Α) Να αποδείξετε ότι η f **παρουσιάζει ελάχιστο**

Β) Αποδείξτε την ανισότητα

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha} \geq \alpha + \beta + \gamma \ \textbf{ για κάθε } \alpha, \beta, \gamma > 0$$

Λύση

Α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $[0, +\infty)$

Για κάθε $x \geq 0$ ισχύει ότι

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$$

και επειδή $f(1) = 0$ έχουμε ότι $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \geq 0$, συνεπώς η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 0$

Β) Από το Α ερώτημα έχουμε ότι

$x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0$, από όπου προκύπτει :

Για $x = \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$ ότι $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} - 2\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2\frac{\alpha}{\beta} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta} - 2\alpha + \beta \geq 0 \quad (1).$$

Για $x = \dfrac{\beta^2}{\gamma^2}$ παίρνουμε $\dfrac{\beta^2}{\gamma} - 2\beta + \gamma \geq 0 \quad (2)$

και για $x = \dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}$ ότι $\dfrac{\gamma^2}{\alpha} - 2\gamma + \alpha \geq 0 \quad (3).$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) έχουμε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha} \geq \alpha + \beta + \gamma$$