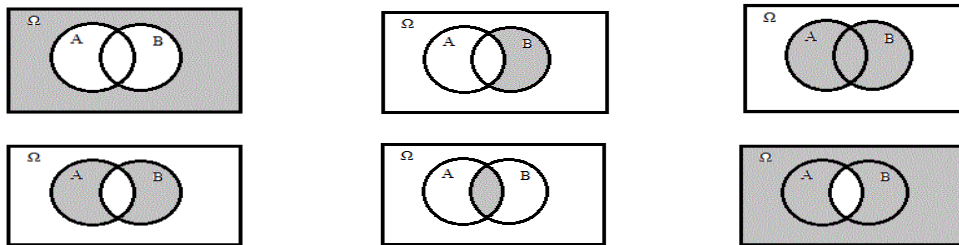


ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΚΥΡΙΑΚΗ 19 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Όνομα/Επίθετο: _____

Ζήτημα 1^ο

Να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων και λεκτικά ποιο ενδεχόμενο παριστάνει κάθε ένα από τα γραμμοσκιασμένα χωρία στα παρακάτω διαγράμματα Venn, μεταφέροντας τα στο γραπτό σας.



18M

Ζήτημα 2^ο

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(A - B) = \frac{5}{8} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

α) Να υπολογίσετε την $P(A \cap B)$

β) i) Να υπολογίσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: « A ή B »

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου.

16M

Ζήτημα 3^ο

Σε ένα σχολείο τα ποσοστά των μαθητών που έγραψαν πάνω από τη βάση στα Μαθηματικά είναι 70% ,στη Φυσική 80% ,ενώ το 60% έγραψε πάνω από τη

βάση στα Μαθηματικά και στη Φυσική. Επιλέγουμε στην τύχη έναν από τους παραπάνω μαθητές. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :

- i. ο μαθητής έγραψε πάνω από τη βάση στα Μαθηματικά ή στη Φυσική.
- ii. ο μαθητής δεν έγραψε πάνω από τη βάση ούτε στα Μαθηματικά, ούτε στη Φυσική.
- iii. ο μαθητής έγραψε πάνω από τη βάση στα Μαθηματικά αλλά όχι στη Φυσική.
- iv. ο μαθητής έγραψε πάνω από τη βάση σε ένα μόνο από τα παραπάνω δύο μαθήματα.

24M

Ζήτημα 4^ο

A. Ένα Λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α' τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ' τάξης είναι 20%. Να βρείτε :

- α. Το πλήθος των μαθητών της Γ' τάξης
- β. Το πλήθος των μαθητών της Β' τάξης
- γ. Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β' τάξης.

18M

B. Δίνονται τα ισοπίθανα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν οι πιθανότητες των ενδεχομένων B και $A \cup B$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν ρίζες της εξίσωσης $36x^2 - 27x + 5 = 0$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων.

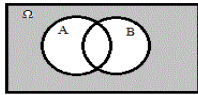
- i. A , B , $A \cap B$, $A \cup B$
- ii. $A - B$ και $B - A$
- iii. $(A - B) \cup (B - A)$

24M

Λύσεις Διαγωνίσματος

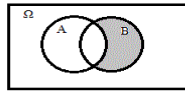
Ζήτημα 1^ο

Είναι:



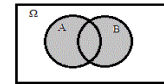
$$(A \cup B)'$$

(να μην πραγματοποιηθεί
κανένα από τα A και B)



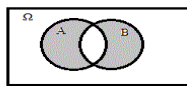
$$(B - A)$$

(να πραγματοποιηθεί
μόνο το B)



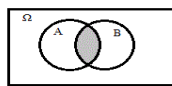
$$(A \cup B)$$

(να πραγματοποιηθεί ένα
τουλάχιστον από τα A και B)



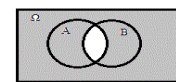
$$[(A - B) \cup (B - A)]$$

(να πραγματοποιηθεί
μόνο ένα από τα A και B)



$$(A \cap B)$$

(να πραγματοποιηθεί
και το A και το B)



$$(A \cap B)'$$

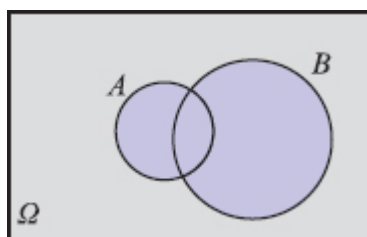
(να μην πραγματοποιηθούν
ταυτόχρονα τα A και B)

Ζήτημα 2^ο

α) Για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{5}{8} = \frac{3}{4} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

β) i) Το ενδεχόμενο «A ή B» πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B, συμβολίζεται με $A \cup B$ και με διάγραμμα Venn παριστάνεται όπως στο παρακάτω σχήμα.



β) ii) Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{7}{8}$$

Ζήτημα 3ο

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :

M: Ο μαθητής έγραψε πάνω από τη βάση στα Μαθηματικά ,

Φ: Ο μαθητής έγραψε πάνω από τη βάση στη Φυσική .

Άρα $M \cap \Phi$ το ενδεχόμενο ο μαθητής έγραψε πάνω από τη βάση στα Μαθηματικά και στη Φυσική .

i. Ζητείται η πιθανότητα ο μαθητής να έγραψε πάνω από τη βάση στα Μαθηματικά ή στη Φυσική ,δηλαδή η πιθανότητα του ενδεχομένου $(M \cup \Phi)$.

$$\text{Έχουμε : } P(M \cup \Phi) = P(M) + P(\Phi) - P(M \cap \Phi) = \frac{70}{100} + \frac{80}{100} - \frac{60}{100} = \frac{90}{100} .$$

ii. Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $(M \cup \Phi)'$.Θα έχουμε :

$$P(M \cup \Phi)' = 1 - P(M \cup \Phi) = 1 - \frac{90}{100} = \frac{10}{100} .$$

iii. Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $M - \Phi$.Θα έχουμε :

$$P(M - \Phi) = P(M) - P(M \cap \Phi) = \frac{70}{100} - \frac{60}{100} = \frac{10}{100}$$

iv. Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $[(M - \Phi) \cup (\Phi - M)]$.Επειδή τα ενδεχόμενα $(M - \Phi)$ και $(\Phi - M)$ είναι ασυμβίβαστα θα έχουμε :

$$\begin{aligned} P[(M - \Phi) \cup (\Phi - M)] &= P(M - \Phi) + P(\Phi - M) = \\ &= P(M) - P(M \cap \Phi) + P(\Phi) - P(\Phi \cap M) = \frac{70}{100} - \frac{60}{100} + \frac{80}{100} - \frac{60}{100} = \frac{30}{100} . \end{aligned}$$

Ζήτημα 4ο

A. α) Έστω Ω το σύνολο των μαθητών του σχολείου και A, B και Γ τα ενδεχόμενα ένας μαθητής να είναι μαθητής της A', της B' ή της Γ' Λυκείου αντίστοιχα. Τότε από την υπόθεση έχουμε $N(\Omega) = 400$, $N(A) = 200$

$$\text{και } P(\Gamma) = 20\% \Leftrightarrow \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow \frac{N(\Gamma)}{400} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow 100 \cdot N(\Gamma) = 20 \cdot 400 \Leftrightarrow$$

$$N(\Gamma) = \frac{20 \cdot 400}{100} \Leftrightarrow N(\Gamma) = 80, \text{ δηλαδή η } \Gamma' \text{ τάξη έχει 80 μαθητές.}$$

β) Η Β' τάξη έχει $N(B) = N(\Omega) - N(A) - N(\Gamma) = 400 - 200 - 80 = 120$ μαθητές.

$$\gamma) \text{ Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Rightarrow P(B) = \frac{120}{400} \Rightarrow$$

$P(B) = \frac{30}{100} = 30\%$. Δηλαδή η πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β' τάξης, είναι 30%.

Β. i. Αφού Α και Β δύο ισοπίθανα ενδεχόμενα θα ισχύει: $P(A) = P(B)$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι $B \subseteq A \cup B$ άρα $P(B) \leq P(A \cup B)$, δηλαδή η $P(B)$ θα ισούται με την μικρότερη ρίζα της εξίσωσης. Για την επίλυση της εξίσωσης, έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-27)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 5 = 729 - 720 = 9. \text{Οπότε:}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-27) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 36} = \frac{27 \pm 3}{72}. \text{Δηλαδή } x_1 = \frac{27+3}{72} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12} \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{27-3}{72} = \frac{24}{72} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Είπαμε όμως ότι $P(B) \leq P(A \cup B)$. Άρα $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = P(A)$ και $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$.

Αφού όμως $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$ τα ενδεχόμενα είναι μη ασυμβίβαστα. Άρα για την $P(A \cap B)$ θα έχω: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ή

$$P(A \cap B) = \frac{4}{12} + \frac{4}{12} - \frac{5}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

ii. Για τα ενδεχόμενα $(A - B)$ και $(B - A)$ ισχύει:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12} \text{ και}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12} .$$

iii. Αφού τα ενδεχόμενα $(A - B)$ και $(B - A)$ είναι ασυμβίβαστα θα ισχύει:

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$