Διαγώνισμα 1ου Τετραμήνου Άλγεβρα - Α΄ Λυκείου

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:...

ΤΜΗΜΑ: ***Α4*** ***Επιμέλεια: Χατζόπουλος Μάκης*** ***Δευτέρα 17/1/2011***

ΘΕΜΑ Α (Μονάδες 40)

1. α) Να **αποδείξετε** ότι $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\cdot\mu]{\alpha},\ \alpha \ge 0$. **β) Σωστό ή Λάθος;** $\sqrt[4]{(-3)^4} = -3$

Μονάδες 22+ 2 =24

2. Συμπληρώστε κατάλληλα τα παρακάτω κενά χωρίς απόλυτα:

α. $|x| = 2 \Leftrightarrow x =$ .... **β.** $|4-\pi| =$ .... **γ.** $\left|\sqrt[3]{3}-2\right| =$ ....

Μονάδες 2 * 3 = 6

3. Αν $1 \le \alpha < \beta$ συμπληρώστε στα παρακάτω κενά τα σύμβολα <, > , =, **ή** και κατάλληλους συνδυασμούς:

α) $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta-3)\cdot(2\alpha+3\beta)$.....0 **β)** $\alpha\cdot\beta^3\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha}-1\right)\left(1-\sqrt[\nu]{\beta}\right)$......0, $\nu \in \mathbb{N}^*$ **Μονάδες 5 * 2 = 10**

ΘΕΜΑ Β (Μονάδες 30)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε: $|\alpha| < |\beta|$ και $|\alpha+\beta x| < |\alpha x+\beta|$.

1) Να αποδείξετε ότι:

α. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) < 0$ **β.** $\alpha^2+\beta^2x^2 < \beta^2+\alpha^2x^2$ **γ.** $|x| < 1$ **Μονάδες 3 * 8 =24**

2) Στη συνέχεια γράψτε την παρακάτω παράσταση Κ χωρίς τετραγωνική ρίζα και απλοποιήστε την:

$K = \sqrt{x^2-2|x|+1}$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ (Μονάδες 30) – Κατασκευή άσκησης ©Μάκης Χατζόπουλος

Δίνονται οι αριθμοί: $\alpha = \left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)$ και $\beta = \left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)$

Α. Να δείξετε ότι:

1. $\alpha,\beta > 0$ **2.** $\alpha\cdot\beta = 1$ **3.** $\alpha+\beta > 2$ **4.** $\alpha > \beta$

Μονάδες: 5 + 6 + 7 + 7 =25

Β. Στη συνέχεια, να γίνει ρητοποίηση παρονομαστή για τον αριθμό: $\frac{1}{\beta}$ **Μονάδες 5**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Γράψτε το **ονοματεπώνυμό σας** στο πάνω μέρος των **φωτοαντιγράφων** τα οποία θα παραδώσετε μαζί με το γραπτό στο τέλος της εξέτασης.

2. Να γράψετε τις **απαντήσεις** με **μπλε** ή **μαύρο στυλό** στις κόλλες αναφοράς και **όχι πάνω στα θέματα**.

3. Οι πράξεις μπορούν να γίνουν με **μολύβι**.

5. Να απαντήσετε σε **όλα** τα θέματα. Τις εκφωνήσεις να **μην** τις μεταφέρετε στο τετράδιο σας.

6. Διάρκεια εξέτασης : μια **(1) ώρα**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ενδεικτικές απαντήσεις

Θέμα Α

1. α) Δες απόδειξη βιβλίου σελ. 47 **β)** Λάθος, (το σωστό θα ήταν αν είχε απόλυτο το – 3)

2. α. $|x|=2 \Leftrightarrow x=\pm 2$ **β.** $|4-\pi|=+(4-\pi)=4-\pi$ **γ.** $\left|\sqrt[3]{3}-2\right|=\left|\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{8}\right|=-\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{8}\right)=-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{8}=-\sqrt[3]{3}+2$

3. α. $\underbrace{(\alpha-\beta)}_{-}\cdot\underbrace{(\alpha-\beta-3)}_{-}\cdot\underbrace{(2\alpha+3\beta)}_{+}>0$ **β.** $\underset{+}{\alpha}\cdot\underset{+}{\beta^3}\cdot\underbrace{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}-1\right)}_{+}\underbrace{\left(1-\sqrt[\nu]{\beta}\right)}_{-}<0,\ \nu\in\mathbb{N}^*$

Θέμα Β

1. α) Παίρνουμε την δεδομένη σχέση: $|\alpha|<|\beta|\Rightarrow|\alpha|^2<|\beta|^2\Rightarrow\alpha^2<\beta^2\Rightarrow\alpha^2-\beta^2<0\Rightarrow(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)<0$

β) Επίσης παίρνουμε την δεύτερη δεδομένη σχέση:

$|\alpha+\beta x|<|\alpha x+\beta|\Rightarrow|\alpha+\beta x|^2<|\alpha x+\beta|^2\Rightarrow(\alpha+\beta x)^2<(\alpha x+\beta)^2\Rightarrow\alpha^2+\cancel{2\alpha\beta x}+\beta^2x^2<\alpha^2x^2+\cancel{2\alpha\beta x}+\beta^2\Rightarrow\alpha^2+\beta^2x^2<\beta^2+\alpha^2x^2$

γ) Παίρνουμε το αποτέλεσμα του (β) ερωτήματος $\alpha^2+\beta^2x^2<\beta^2+\alpha^2x^2$ και έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha^2+\beta^2x^2<\beta^2+\alpha^2x^2\Rightarrow\alpha^2+\beta^2x^2-\beta^2-\alpha^2x^2<0\Rightarrow\alpha^2\left(1-x^2\right)-\beta^2\left(1-x^2\right)<0\Rightarrow\left(1-x^2\right)\left(\alpha^2-\beta^2\right)<0$$

$$\Rightarrow\left(1-x^2\right)\underbrace{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}_{-}<0$$

Άρα για να είναι το γινόμενο αρνητικό πρέπει το $1-x^2>0$ δηλαδή $x^2<1\Rightarrow|x|^2<1^2\Rightarrow|x|<1$

(από την ιδιότητα $\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha^\nu<\beta^\nu,\ \alpha,\beta>0\ \nu\in\mathbb{N}^*$ εφαρμόζοντας το αντίστροφο, αφού το απόλυτο x και το 1 είναι θετικοί αριθμοί)

2) Έχουμε διαδοχικά:

$$K=\sqrt{x^2-2|x|+1}=\sqrt{|x|^2-2|x|+1}=\sqrt{\left(|x|-1\right)^2}=\Big|\underbrace{|x|-1}_{-}\Big|=-\left(|x|-1\right)=-|x|+1$$

Θέμα Γ

Α. 1) Έχουμε $\alpha=\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)$, θα δείξουμε ότι α > 0.

Όμως, $\sqrt{7}>0$ και $\sqrt{6}>0$ άρα $\sqrt{7}+\sqrt{6}>0$ (ως άθροισμα θετικών αριθμών)

Επίσης, $\sqrt{6}>\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{6}-\sqrt{5}>0$ επομένως το α είναι θετικός αριθμός ως γινόμενο θετικών αριθμών.

Ανάλογα και για το β.

2) Έχουμε διαδοχικά παίρνοντας το Α΄ μέλος της ζητούμενης σχέσης:

$$\alpha\cdot\beta=\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)=\underbrace{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}_{\text{ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ}}\underbrace{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)}_{\text{ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ}}$$

$$=\left(\sqrt{6}^2-\sqrt{5}^2\right)\left(\sqrt{7}^2-\sqrt{6}^2\right)=(6-5)(7-6)=1\cdot 1=1$$

3) Αφού θέλουμε να αποδείξουμε μια ανισοτική σχέση πρέπει να πάρουμε και τα δύο μέλη της ζητούμενης σχέσης,

Α΄ τρόπος (με πράξεις)

$\alpha+\beta>2 \Leftrightarrow (\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{6})+(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{6})>2 \Leftrightarrow \sqrt{42}+\cancel{\sqrt{6}^2}-\cancel{\sqrt{35}}-\sqrt{30}+\sqrt{42}-\cancel{\sqrt{6}^2}+\cancel{\sqrt{35}}-\sqrt{30}>2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{42}-2\sqrt{30}>2 \overset{(:2)}{\Leftrightarrow} \sqrt{42}-\sqrt{30}>1 \Leftrightarrow \sqrt{42}>1+\sqrt{30} \Leftrightarrow \sqrt{42}^2>(1+\sqrt{30})^2$

$\Leftrightarrow 42>1+2\sqrt{30}+30 \Leftrightarrow 11>2\sqrt{30} \Leftrightarrow 11^2>(2\sqrt{30})^2 \Leftrightarrow 121>120$ που ισχύει

<u>Β΄ τρόπος (με την βοήθεια του ερωτήματος 2)</u>

Από το ερώτημα 2 έχουμε, $\alpha\beta=1 \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{\alpha}$ (1), άρα η ζητούμενη σχέση γίνεται διαδοχικά,

$\alpha+\beta>2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha+\frac{1}{\alpha}>2 \overset{\cdot\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2+1>2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1>0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2>0$ που ισχύει

4) Για να αποδείξουμε την ανισοτική σχέση α > β παίρνουμε και τα δύο μέλη της ζητούμενης σχέσης,

<u>Α΄ τρόπος (με πράξεις)</u>

$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0 \Leftrightarrow (\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{6})-(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{6})>0$

$\Leftrightarrow \cancel{\sqrt{42}}+\sqrt{6}^2-\sqrt{35}-\cancel{\sqrt{30}}-\cancel{\sqrt{42}}+\sqrt{6}^2-\sqrt{35}+\cancel{\sqrt{30}}>0 \Leftrightarrow 12>2\sqrt{35} \Leftrightarrow 6>\sqrt{35} \Leftrightarrow 6^2>\sqrt{35}^2 \Leftrightarrow 36>35$ που ισχύει

<u>Β΄ τρόπος (με την βοήθεια του ερωτήματος 2)</u>

$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha>\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha^2>1 \Leftrightarrow \alpha^2-1>0 \Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha+1)>0$

όμως το α + 1 είναι θετικός αριθμός, αφού α >0, οπότε πρέπει: α – 1 > 0 δηλαδή

$\alpha>1 \Leftrightarrow (\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{6})>1 \Leftrightarrow \sqrt{7}+\sqrt{6}>\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sqrt{7}+\sqrt{6}>\frac{1\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}$

$\Leftrightarrow \sqrt{7}+\sqrt{6}>\frac{1\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{\sqrt{6}^2-\sqrt{5}^2} \Leftrightarrow \sqrt{7}+\sqrt{6}>\frac{1\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{1} \Leftrightarrow \sqrt{7}+\cancel{\sqrt{6}}>\cancel{\sqrt{6}}+\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{7}>\sqrt{5}$ που ισχύει

Β. Έχουμε,

<u>Α΄ τρόπος (με πράξεις)</u>

Πολ/με με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή, ο παρονομαστής είναι ο β = $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{6})$ άρα η συζυγή του παράσταση είναι $(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{6})$

$$\frac{1}{\beta}=\frac{1}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{6})}=\frac{1\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{6})\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}=\frac{1\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{(6-5)(7-6)}$$

$$=\frac{1\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{1}=(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{6})$$

<u>Β΄ τρόπος (με την βοήθεια του ερωτήματος 2)</u>

$\frac{1}{\beta}=\frac{1\cdot\alpha}{\beta\cdot\alpha}=\frac{\alpha}{1}=\alpha=(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{6})$

Επιμέλεια θεμάτων: Χατζόπουλος Μάκης

Καθηγητής στο 1ο Λύκειο Ζακύνθου