

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ 09/01/10

### ΘΕΜΑ 1

**A.** Αν  $\alpha, \beta$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί και  $\nu$  φυσικός,  $\nu \neq 0$ , να αποδείξετε ότι:  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$

**Μονάδες 10**

**B.** Να γράψετε πως συμβολίζεται με μορφή διαστήματος, το σύνολο των αριθμών  $x$  με  $\alpha \leq x$ .

**Μονάδες 5**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.

1. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $||x| - x| = |x| - x$ .

2. Αν  $\alpha^2 + |\beta| \leq 0$  τότε  $\alpha = 0$  και  $\beta = 0$ .

3. Αν  $\alpha > 10^{-100^{33}}$  τότε  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ .

4. Ο αριθμός  $26^{2009} - 20^{2009}$  είναι πολλαπλάσιο του 3.

5. Για κάθε  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  με  $\alpha\gamma = \beta\gamma$  ισχύει  $\alpha = \beta$ .

6. Για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι:  $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ .

7. Για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha < \beta$  ισχύει  $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$ .

8. Αν  $x \in (-\theta, \theta)$  τότε  $|x| < \theta$ .

9. Για κάθε ζεύγος  $\alpha, \beta$  αρρήτων ο αριθμός  $\alpha + \beta$  είναι άρρητος.

10. Για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι:  $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ 2

**A.** Να λύσετε την εξίσωση:  $1 - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{2x}{x^2-4}$

**Μονάδες 11**

**B.** Να λύσετε την εξίσωση:  $(x+3)^2(x-6) = (x^2-36)(x+3)$

**Μονάδες 8**

**Γ.** Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\frac{x-3}{4} + \frac{x}{6} < \frac{2x-3}{3} \quad \text{και} \quad \frac{2x-1}{3} < x - \frac{1-x}{2}$$

**Μονάδες 6**



### ΘΕΜΑ 3

**A.** Αν  $1 < x < 3$  και  $3 < y < 4$  να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η

παράσταση:  $\frac{y^2 - 2x}{4 - x}$ .

**Μονάδες 5**

**Β.** Αν  $\alpha < 2$  να αποδείξετε ότι:  $\alpha^3 - 2\alpha^2 + 3\alpha - 6 < 0$ .

**Μονάδες 5**

**Γ.** Να αποδείξετε ότι:  $x^2 + 4xy + 21y^2 \geq 0$ .

**Μονάδες 5**

**Δ.** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:  $x^2 - 4x + 8$ .

**Μονάδες 5**

**Ε.** Αν  $\alpha, \beta$  αρνητικοί με  $\alpha\beta = 1$ , να αποδείξετε ότι:  $(\alpha + 1)(\beta + 1) \leq 4$ .

**Μονάδες 5**

#### **ΘΕΜΑ 4**

**Α.** Να λύσετε την ανίσωση:  $\lambda(x - 3) \geq 1 + 2x$  όπου  $\lambda$  πραγματική παράμετρος.

**Μονάδες 9**

**Β.** Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων  $\lambda$  και  $\mu$  ώστε η ισότητα:

$$(\lambda^{2011} - \mu^{2010} + 2)x = \lambda^2 - 2(\mu - \lambda) + 2 + \mu^2$$

να ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

**Μονάδες 11**

**Γ.** Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{x-2007}{3} + \frac{x-2006}{4} + \frac{x-2005}{5} + \frac{x-2004}{6} < \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006} + \frac{x-5}{2005} + \frac{x-6}{2004}$$

**Μονάδες 5**