Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΆΛΓΕΒΡΑ

2020-2021

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Χανιά

555
Ταξινομημένες ασκήσεις για λύση

Άλγεβρα

Ταξη: Α Γενικού Λυκείου
Άλγεβρα
Έκδοση 20.07

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μαθηματικός M.Ed.
Χανιά   Ιούλιος 2020

Ιστοσελίδα: http://users.sch.gr/mipapagr
mail : papagrigorakism@gmail.com

0 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

Μαθηματική Λογική

0.01 Διατυπώστε τις αρνήσεις των προτάσεων

Α) Υπάρχει τρίγωνο που είναι ορθογώνιο

Β) Μερικοί ακέραιοι είναι πρώτοι ,

Γ) Υπάρχει πραγματικός αριθμός που το τετράγωνό του είναι αρνητικό ,

Δ) Κάθε τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

0.02 Διατυπώστε τις αντίστροφες προτάσεις :

Α) Αν $\alpha=3$ τότε $\alpha^2=9$,

Β) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες του ίσες τότε είναι ισοσκελές ,

Γ) Αν ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο τότε είναι ισοσκελές.

0.03 Να διατυπώσετε τις αντιθετοαντίστροφες προτάσεις των προτάσεων : (Δίνεται ότι ο $\alpha\in Z$)

Α) Αν ο α^2 είναι περιττός τότε και ο α είναι περιττός

Β) Αν ένα τετράπλευρο έχει άνισες διαγωνίους, τότε αυτό δεν είναι ορθογώνιο.

Γ) Αν ένα τρίγωνο δεν είναι ισοσκελές τότε δεν είναι ισόπλευρο

0.04 Χαρακτηρίστε ως Σωστή ή Λάθος κάθε μια από τις συνεπαγωγές: (για κάθε $\alpha\in R$):

Α) $\alpha<2\Rightarrow\alpha\le2$ Β) $\alpha^2<4\Rightarrow\alpha<2$,

Γ) $\alpha^2<4\Rightarrow-2<\alpha<2$.

Δ) $\alpha^2+1=\alpha^2+2 \Rightarrow 1=2$

Ε) $\alpha^2\ne\alpha\Rightarrow\alpha\ne1$ Στ) $\alpha\ne0 \Rightarrow \alpha^2>0$

Ζ) $\alpha^2+1=\alpha^2+2 \Rightarrow 1=2$

0.05 ** Να αποδείξετε ότι:

Α) $(p\wedge q)\Rightarrow(q\wedge p)$ Β) $(p\wedge q)\Rightarrow p$,

Γ) $p\Rightarrow(p\vee q)$ Δ) . $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\overline{q}\Rightarrow\overline{p})$

Σύνολα

0.06 Α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο: Β={ $(x,y)/x,y\in Z$ με $0\le x\le1$ και $x+y=1$ }.

Β) Γράψτε το σύνολο Γ={2,4,6,8} με περιγραφή

Δ) Για τα προηγούμενα σύνολα να χαρακτηρίσετε σωστές ή λάθος τις προτάσεις:

$3\in\Gamma$, $(0,2)\in B$, $8\notin B$, $-1\notin\Gamma$, $0\in\Gamma$

0.07 Δίνονται τα σύνολα:

$A=\{x\in R/(x^2-4)(x+1)(x^3-64)=0\}$ και

$B=\{y\in R/(y-2)(y^2-16)(y^2-9)=0\}$

Να βρείτε τα σύνολα $A\cup B$ και $A\cap B$.

0.08 Να βρεθεί η $A\cup B$ και $A\cap B$ όταν

α) $A=R-\{1,2\}$ και $B=R-\{1,3\}$,

β) $A=R-\{1,2\}$ και $B=[1,+\infty)$,

γ) $A=(3,+\infty)$ και $B=(-\infty,5]$.

0.09 Αν $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{2,3\}$ και $B=\{3,4\}$ τότε να αποδείξετε ότι: $(A\cup B)'=A'\cap B'$ και $(A\cap B)'=A'\cup B'$ (τύποι DE MORGAN).

0.10 Να συμπληρώσετε τις ισότητες

$N\cup Z=\dots$, $R\cap Z=\dots$, $R\cap Q=\dots$, $R\cap N=\dots$

0.11 Έστω ότι τα σύνολα $A,B\subseteq\Omega$ όπου Ω το σύνολο αναφοράς. Να χαρακτηρίσετε αν είναι σωστή ή λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

Α) Αν $A\subseteq B$ τότε $A\cup B=A$.

Β) Αν $B\subseteq A$ τότε $A\cap B=B$.

Γ) Αν $A\cup B=\Omega$ και $A\cap B=\varnothing$ τότε $A'=B$.

Δ) Είναι $\varnothing\subseteq A$, για κάθε A.

1 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

2 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

2.01 Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $-3,\ 2,\ 0,\quad 0,\overline{2}\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ 0,2\overline{2}$

2.02 Να διατάξετε σε φθίνουσα σειρά τους αριθμούς $-6,\ \ 0,\overline{3}\ ,\ \frac{1}{3},\ 6\ ,\ -7,\ \ 0\ ,\ \ 7$.

2.03 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

Α) $1+\dfrac{1-\frac{1}{3}}{2-\dfrac{1}{2-\frac{1}{2}}}$ Β) $1+\dfrac{4}{2+\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{1-\frac{1}{3}}}}$

2.04 Αν $\alpha=-0,5$, $\beta=0,001$ να υπολογιστεί η παράσταση $3(2\alpha-3\beta)-4\left[-3\alpha+2(\alpha+2\beta-1)\right]$.

2.05 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

Α) $3\left[2(1-4x)+3(1-5x)\right]-2\left[3(1-2x)-x\right]$

Β) $-3\left[-2\beta+\alpha(1-2\beta)\right]-\left[3\alpha-(4\beta-5)\right]$

Γ) $2x-y-\{-5-[-(2x+3y)-9x]-(1+4y)-1\}$

2.06 Δείξτε ότι αν είναι αντίθετοι οι αριθμοί $A=x-3y+4z$ και $B=y-x-2z$, τότε $y=z$.

2.07 Αν οι αριθμοί $2x+1$ και $4-2x$ είναι αντίθετοι, να βρείτε την τιμή του x

2.08 Αν οι αριθμοί $\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}$ και $\beta+\sqrt{\beta^2+1}$ είναι αντίστροφοι δείξτε ότι οι α και β είναι αντίθετοι.

2.09 Να προσδιοριστεί ο $\lambda\in R$ ώστε ο αριθμός $\frac{2\lambda-3}{2\lambda+5}$ να είναι ίσος με τον αντίστροφό του.

2.10 Αν $\frac{x}{y}=3$ να δείξετε ότι $\frac{x-2y}{3x-y}=\frac{1}{8}$

2.11 Αν $\alpha-3\beta=1$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\alpha(\alpha-1)-4\beta(2+\alpha)+\beta(\alpha+8)$.

2.12 Αν $xy(2y-x)\neq 0$ δείξτε ότι είναι ανεξάρτητη των x,y η παράσταση $\dfrac{1}{1-\frac{x}{2y}}+\dfrac{1}{1-\frac{2y}{x}}$

2.13 Να βρεθούν οι x,y,ω αν είναι ανάλογοι των αριθμών $2,3,6$ αντίστοιχα και $3x+4y-5\omega=2$

2.14 Αν $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$, να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων: $\frac{y}{x},\ \frac{x+y}{y},\ \frac{x+2}{y+3},\ \frac{y}{x},\ \frac{y+x}{x},\ \frac{2x}{y},\ \frac{x}{2y}$

2.15 Αν $\frac{x+y}{x-y}=\frac{3}{2}$, $y\neq 0$ να βρεθεί ο λόγος $\frac{x}{y}$ και η τιμή της παράστασης $A=\frac{x^2-y^2}{2xy+x^2}$.

2.16 Αν $\frac{4x-9y}{8x}=\frac{x-y}{2(x+y)}$ με $xy(x+y)\neq 0$, βρείτε την τιμή της παράστασης $\frac{x^2-y^2}{5xy+5y^2}$

2.17 Δίνεται ότι για τους πραγματικούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ με $\beta\neq 0$, $\delta\neq\gamma$ ισχύει $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4$ και $\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$.
Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$

2.18 Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α,β με $\alpha\neq\beta$ για τους οποίους ισχύει $\frac{\beta^2}{\beta^4+1}=\frac{\alpha^2}{\alpha^4+1}$. Να δείξτε ότι οι α και β είναι αντίστροφοι και ότι $\frac{\alpha^{18}\cdot\left(\beta^{-3}\right)^{-5}}{\alpha^3\cdot(\alpha\beta)^{-5}}=1$

2.19 Αν ν φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $3^{\nu+2} - 3^{\nu+1} - 3^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

2.20 Αποδείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών περιττών αριθμών είναι άρτιος.

2.21 Αν $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{3}$ και $x - y = 1$ να βρεθούν οι x, y

2.22 Αν ο α είναι περιττός ακέραιος δείξτε ότι ο αριθμός $(\alpha+1)^2 + 2\alpha + 2$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

2.23 Αν $\dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{\beta}{y} = \dfrac{\gamma}{\omega}$ να αποδείξετε ότι:

A) $$\left(\frac{\alpha^6+\beta^6+\gamma^6}{x^6+y^6+\omega^6}\right) = \left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{x^2+y^2+\omega^2}\right)^3$$

B) $$\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{x^2+y^2+\omega^2}\right)^{\nu} = \left(\frac{\alpha^{\nu}+\beta^{\nu}+\gamma^{\nu}}{x^{\nu}+y^{\nu}+\omega^{\nu}}\right)^2$$

2.24 Να δείξετε ότι : i) Αν α ρητός με $\alpha \neq 0$ και β άρρητος, τότε ο $\alpha \cdot \beta$ είναι άρρητος

ii) Αν α ρητός και β άρρητος, τότε ο α-β είναι άρρητος

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

2.25 Υπολογίστε τις παραστάσεις

A) $(-2)^3 (-0{,}5)^{-2}$ B) $12^{100} \cdot 1{,}5^{60} \cdot 6^{-149}$

Γ) $(-0{,}25)^{17} \cdot 8^{11}$ Δ) $(-4)^{60} \cdot (-0{,}125)^{40}$

Ε) $\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3} \cdot (0{,}1)^{-3}\right] : (-10)^2$

2.26 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

A) $\dfrac{(\alpha^2\beta^{-3})^2(\alpha^{-2}\beta)}{(\alpha^3\beta^2)^{-1}(\alpha^2\beta^{-4})}$, B) $\dfrac{3x^2y^{-1} - 4x^{-3}y}{x^{-2}y}$.

2.27 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

A) $x^5(xy^2)^3 : (xy^{-1})^2$ αν $x = 0{,}4$, $y = -2{,}5$

B) $\dfrac{(x^3y^{-1})^2}{\left[x^{-1}y(x^3y^{-3})^{-1}\right]^{-2}}$ αν $x = \dfrac{1}{10^3}$, $y = \dfrac{-1}{10^2}$

2.28 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-3} \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^{-2}$ και $\dfrac{(\alpha^2\beta)^{-3}}{\alpha^{-7}\cdot\beta^{-2}} \cdot \dfrac{(\alpha\beta^2)^{-3}}{\alpha^{-2}\cdot\beta^{-7}}$

2.29 Απλοποιήστε τις παραστάσεις

A) $\left(\dfrac{x^2y}{xy^3}\right)^{-2} \cdot (xy)^2$ B) $\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^3}\right)\left(\dfrac{2\beta^2}{5\alpha^3}\right)^{-1} 2\alpha\beta^{-4}$

2.30 Βρείτε τις τιμές των κ, λ όταν:

A) $(-15x^{3\kappa-1}y^{\lambda}) : (-3x^{\kappa}y^2) = 5x^3y$

B) $(4\alpha^{2\kappa-1}\beta^{3\lambda}) : (12\alpha^{\kappa+2}\beta^{\lambda+1}) = \dfrac{2}{3}\alpha\beta^3$

2.31 Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορούμε να φτιάξουμε με: α) τρία δυάρια, β) τρία τριάρια, γ) τρία τεσσάρια;

2.32 Για ποια τιμή του κ η παράσταση $\alpha^{\kappa+1} \cdot \beta^{2\kappa}$ γράφεται ως δύναμη με βάση $(\alpha\beta)$;

2.33 Να αποδείξετε ότι $\dfrac{6^{\nu+2}}{2^{\nu-1} \cdot 3^{\nu+1}} = 24$, όπου ν φυσικός αριθμός με $\nu > 1$.

2.34 Αν ο ν είναι φυσικός με $\nu > 1$, να αποδείξετε ότι: $(-1)^{\nu} + (-1)^{\nu+1} + (-1)^{\nu+2} + (-1)^{\nu+3} = 0$

2.35 Δείξτε ότι $\left(\dfrac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}\right)^{\alpha+\beta} \cdot \left(\dfrac{x^{\beta}}{x^{\gamma}}\right)^{\beta+\gamma} \cdot \left(\dfrac{x^{\gamma}}{x^{\alpha}}\right)^{\gamma+\alpha} = 1$

2.36 Να γράψετε την παράσταση:

$\{2^{101} : [(5^{171} : 5^{170} - 3)^{98} + 2^{105} : (2^3 \cdot 2^4) + (2^{11})^9]\} \cdot 2^{38}$

ως δύναμη με βάση το 8

2.37 Δίνονται οι μη μηδενικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει: $\dfrac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Δείξτε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι και υπολογίστε την τιμή της παράστασης: $\dfrac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

2.38 Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να είναι τέλεια τετράγωνα οι παραστάσεις:

Α) $16+8x+...$

Β) $9\alpha^2+...-12\alpha\beta$

Γ) $x^4y^2-6x^2y+...$

Δ) $4x^2+1+...$

Ε) $9+4\sqrt{2}=(...+...)^2$

2.39 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

Α) $x^2-\ ....\ +1\ =\ (....\ -\ ....)^2$

Β) $4\alpha^2+\ .....\ +\ 9=(....\ +....)^2$

Γ) $25y^2-........+16x^2=(....-....)^2$

Δ) $(2x-1)(4x^2+2x+1)=....-.....$

Ε) $(2x+3)(4x^2-6x+9)=....+.....$

Στ) $8x^3-.......+.......-27=(.....-......)^3$

Ζ) $1+......+......+x^3y^3=(......+.....)^3$

2.40 Α) (Lagrange) Να αποδείξετε ότι $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$

Β) Να γραφεί το γινόμενο $25\cdot 26$ ως άθροισμα τετραγώνων δύο ακεραίων.

2.41 Να αποδειχτεί ότι

Α) $\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2=1$

Β) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=xy$

2.42 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

Α) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$

Β) $4\alpha(\alpha-1)-(2\alpha-1)^2=-1$

Γ) $(\alpha^2-3)^2-(\alpha-1)\cdot(\alpha^3-6\alpha)=\alpha(\alpha^2-6)+9$

Δ) $(\alpha^2+1)\cdot(x^2+4)-(2\alpha-x)^2=(\alpha x+2)^2$

2.43 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

Α) $(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3-6\alpha^2\beta=2\beta^3$

Β) $2\alpha(2\alpha-1)^2-(2\alpha-1)^3-4\alpha^2=1-4\alpha$

2.44 Αν $\alpha-\beta=2$ να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2-4\alpha-2\alpha\beta+4\beta+3=-1$.

2.45 Αν $x-y=3$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων $A=3x-3y-x^2-y^2+2xy$

$B=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-5x+5y-2$.

2.46 Αν $\alpha-\beta=2$ να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2-4\alpha-2\alpha\beta+4\beta+3=-1$

2.47 Αν $\alpha=\frac{1+x^2}{2x}$, $\beta=\frac{1+x^2}{1-x^2}$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=1$

2.48 Αν $x=\lambda+\frac{1}{\lambda}$, $y=\lambda-\frac{1}{\lambda}$ να αποδείξετε ότι: $x^2-y^2=4$

2.49 Αν $x=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ τότε $\frac{\alpha^2}{\alpha-x}+\frac{\beta^2}{\beta-x}=\alpha+\beta$

2.50 Αν $\alpha-\beta=\frac{9}{\alpha\cdot\beta}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=(\alpha-\beta)^3-\alpha^3+\beta^3$.

2.51 Αν $\alpha\beta=1$ δείξτε ότι $\frac{\alpha^3}{1+\alpha^2}-\frac{\beta^3}{1+\beta^2}=\alpha-\beta$

2.52 Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $2(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2$ τότε $\alpha=\beta$.

Β) Αν $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, $\alpha\beta\neq 0$ τότε $\alpha=\beta$

2.53 Να δείξετε ότι $\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}-\beta\right):\left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}\right)=1$

2.54 Αν $x^2+y^2=1$ να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\left(3-2y^2\right)y^4+\left(3-2x^2\right)x^4$ είναι ανεξάρτητη των πραγματικών $x,\ y$

2.55 Να δείξετε ότι η παράσταση:
$\left(x^3+y^3\right)^2-\left(x^3-y^3\right)^2-4x^2\left(xy^3+1\right)+4x^2+3$
είναι ανεξάρτητη των x, y .

2.56 Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{R}$, δείξτε ότι: αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ τότε $\alpha=\beta=\gamma$.

2.57 Για κάθε $x,y,\omega\in\mathrm{R}$, να αποδείξετε ότι: αν $(x+y+\omega)^2=3\left(x^2+y^2+\omega^2\right)$ τότε $x=y=\omega$.

2.58 Αν α,β,γ είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου και ισχύει ότι $\dfrac{\alpha^2-\beta\gamma}{\beta+\gamma}=\dfrac{2\alpha-\beta-\gamma}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

2.59 Αν $\beta=\alpha-1$ να αποδείξετε ότι:
$(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^4+\beta^4\right)\left(\alpha^8+\beta^8\right)=\left(\alpha^{16}-\beta^{16}\right)$.

2.60 Αν $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=4(\alpha x+\beta y)$ τότε να αποδείξετε ότι $x=\alpha$ και $y=\beta$.

2.61 Να βρεθούν οι αριθμοί $\alpha,\beta\in R$ για τους οποίους ισχύει ότι: $\alpha^2+\beta^2=6\beta-2\alpha-10$

2.62 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β αν ισχύει ότι $\alpha^2+\beta^2-2\alpha=2\beta+\alpha\beta-4$

2.63 Αν $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=5$ βρείτε τα $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$, $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$.

2.64 Αν $\alpha^2+\beta^2=1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}=\alpha^2-\beta^2$$

2.65 Αν $x+y=2$ και $xy=1$ υπολογίστε τα x^2+y^2, x^3+y^3, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, x^2y+xy^2, $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$.

2.66 Αν $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις:
$(2\alpha+1)(2\beta+1)$, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$, $\alpha^2+\beta^2$, $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$, $\alpha^3+\beta^3$,

2.67 Αν $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=4(\alpha x+\beta y)$ τότε να αποδείξετε ότι $x=\alpha$ και $y=\beta$

2.68 Αν $x=4\alpha^3-3\alpha$, $y=4\beta^3-3\beta$ και $\alpha^2+\beta^2=1$ να αποδείξετε ότι $x^2+y^2=1$.

2.69 Αν $\alpha+\beta\neq0$, $\beta+\gamma\neq0$, $\gamma+\alpha\neq0$ και $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\gamma}=0.$$

2.70 Για κάθε $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in R^*$ με $\alpha+\beta+\gamma=0$, και $\lambda,\ \mu,\ \nu\in Z_+$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\left[\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}\right]^{2\nu-1}+\left[\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right]^{2\mu+2}+\left[\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}\right]^{2\lambda+3}$$

2.71 **Αν για τους θετικούς ακέραιους x,y,ω ισχύει ότι $3^{x^3+y^3}=\left(\dfrac{27^{xy}}{3^{\omega^2}}\right)^{\omega}$ δείξτε ότι $x=y=\omega$.

2.72 ** Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ να αποδειχτεί ότι η παράσταση $\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\gamma+2)}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}$ είναι ανεξάρτητη των α,β,γ

2.73 Αν για κάθε $x\in\mathrm{R}-\{-1,1\}$ ισχύει ότι $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{A}{x-1}-\dfrac{B}{x+1}$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς A και B

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

2.74 Παραγοντοποιήστε τις παραστάσεις:

Α) $2\alpha\beta+3\alpha^2$ Β) $4\alpha^3-8\alpha$

Γ) $10\kappa^2-1000\lambda^2$ Δ) $5\mu^2+10\mu\lambda$

Ε) $x(x-3)+2(3-x)$

Στ) $\alpha^3-4\alpha^2+4\alpha$ Ζ) $2x^4-18x^2$

2.75 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8$

Β) x^3-3x+2 Γ) $x^3+2\sqrt{x}-3$

Δ) $2x\sqrt{x}-6x+3\sqrt{x}-9$

2.76 Παραγοντοποιήστε τις παραστάσεις:

Α) $\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-1$ Β) $x^2-y^2+\omega^2+2x\omega$

Γ) x^2-y^2-2x+1 Δ) $m^2-n^2+2np-p^2$

2.77 Απλοποιήστε τις παραστάσεις, αφού βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται:

Α) $\frac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x^3-1}$ Β) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\cdot\frac{x^3+x^2}{(x+1)^3}$,

Γ) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}\cdot\frac{x^2+2x}{x^2+x-2}$ Δ) $\frac{(x^2-x)+2x-2}{x^2-1}$

2.78 Αν $x=-0{,}5$, $y=-2$, βρείτε την τιμή της παράστασης $\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):\frac{x+y}{2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right]\frac{xy}{(x+y)^2}$.

2.79 Να κάνετε τις πράξεις:

Α) $\frac{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-1}{\alpha^3+\beta^3}\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ Β) $\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{\frac{9}{x}-x}$

2.80 Αν m,n είναι ακέραιοι και x,y πραγματικοί αριθμοί με $xy\neq0$, $xy\neq1$, $xy\neq-1$ αποδείξτε ότι

$$\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}}=1$$

2.81 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\frac{\alpha^3-\beta^3}{(\alpha\beta-\beta^2)^2}:\frac{\alpha\beta+\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}$

Β) $\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}\cdot\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2x-x\beta^2}$

Γ) $\left(1-\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right):\left(\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}-3\alpha\beta\right)$

2.82 Να αποδείξετε ότι:

Α) $\left[\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]:\left(\frac{1}{x^3}-1\right)=1$

Β) $\left(\frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{\beta}{\alpha}}-\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}-1}\right):\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)=1$

2.83 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$

Β) $\frac{\alpha+\beta}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{\beta+\gamma}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}+\frac{\gamma+\alpha}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}$

2.84 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\left(\frac{3}{9-\mu^2}+\frac{2\mu-1}{\mu-3}-\frac{\mu^2-4}{\mu^2+6\mu+9}\cdot\frac{\mu+3}{\mu-2}\right):\frac{\mu}{\mu-3}$

Β) $\left(\frac{3x+2}{2x+3}-\frac{4x-1}{2x+3}-\frac{2x^2+3x}{4x^2+12x+9}\right):\frac{3-2x}{2x+3}$

Γ) $\left[\left(\frac{x^2+y^2}{y}+x\right)\cdot\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}\right]:\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

2.85 Για κάθε φυσικό ν, δείξτε ότι

Α) Ο αριθμός 987^2-985^2 είναι άρτιος.

Β) Ο αριθμός 24 διαιρεί τον $5^{2\nu}-1$.

2.86 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

Α) $\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{4\alpha}\right)$ για $\alpha=-3\frac{3}{4}$

Β) $\left(\frac{2}{2\alpha-1}+\frac{6}{1-4\alpha^2}-\frac{4}{2\alpha+1}\right):\left(1-\frac{4\alpha^2+1}{4\alpha^2-1}\right)$ αν $\alpha=-0{,}1$

ΔΙΑΤΑΞΗ – ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

2.87 Αν $\alpha>1$ να διατάξετε από την μεγαλύτερη προς την μικρότερη τις τιμές $\frac{1}{\alpha}$, α^2, 1, α^3, α.

2.88 Αν $0<\alpha<1$, να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$

2.89 Αν είναι $2<x<8$ να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις
$2x$, $-2x$ $\frac{1}{x}+2$, $1-\frac{1}{1-x}$, $\frac{2x-3}{x}$, x^2, $1-x^3$

2.90 Αν $-2<x<4$ και $3<y<7$ να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι παραστάσεις
$x-y$, $\frac{1}{y}$, $x-\frac{1}{y}$, $2x+3y$, x^2, y^2, x^2+y^2

2.91 Αν $-2<x<-1$ και $2<y<4$ να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι παραστάσεις:
$x-y$, $\frac{1}{y}$, $x-\frac{1}{y}$, $2x+3y$, x^2, y^2, x^2+y^2

2.92 Αν $0<x<1$ και $-2<y<2$ βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων
$x+y$, $2x+3y$, $x-y$, y^2, x^2-y^2

2.93 Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύουν: $2\le\alpha\le4$ και $-4\le\beta\le-3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις: $\alpha-2\beta$, $\alpha^2-2\alpha\beta$, $\alpha^2+\beta^2$

2.94 Αν $-1<\alpha<0$ και $-3<\beta<-1$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:
$\beta-\alpha$, $\alpha\cdot\beta^{-1}$, $\alpha^2-\beta^2$, $3\alpha-4\beta$.

Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε:
$x^2+y^2-2x+6y+10=0$

2.95 Αν $-2<x<1$ και $-3<y<-1$ να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι παραστάσεις:
$2x+y$, $x-y$, $\frac{-1}{y}$, $x-\frac{1}{y}$, $2x+3y$, x^2, y^2, x^2-y^2

2.96 Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $3\alpha<\beta$ τότε $12\alpha<3(\alpha+\beta)<4\beta$.

Β) Αν $\alpha>1$ τότε $\alpha^3>\alpha^2-\alpha+1$.

Γ) Αν $x>y$ τότε $x+7>y+5$.

Δ) $x<1<y \Rightarrow xy-x-y+1<0$

2.97 Για κάθε $\alpha,\beta\in R$, να αποδείξετε ότι:

Α) $\alpha^2+\beta^2+8\ge4\cdot(\alpha+\beta)$

Β) $2\cdot(\alpha^2+\beta^2)\ge(\alpha-\beta)^2$

2.98 Να αποδείξετε ότι

Α) $\alpha\cdot\beta>0\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\ge2$ και $\alpha\cdot\beta<0\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\le-2$

Β) αν $\alpha\in R$ τότε $\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}\le1$.

2.99 Αν $\alpha, \beta, \gamma\in R$ να αποδείξετε ότι:
$\alpha^2+\beta^2\ge2\alpha\beta$ και $(\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1)\ge8\alpha\beta\gamma$.

2.100 Αν α, β θετικοί, να αποδείξετε ότι

Α) $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\le\frac{\alpha+\beta}{4}$ Β) $\frac{\alpha+\beta}{2}\ge\sqrt{\alpha\beta}\ge\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$

2.101 Αν $\alpha>0$ να αποδείξετε ότι

Α) $\alpha+\frac{1}{\alpha}\ge2$ Β) $\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}\le1$

2.102 Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν α, β ομόσημοι αριθμοί τότε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\ge2$

Β) Αν α, β ετερόσημοι τότε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\le-2$

2.103 Να αποδείξετε ότι:

Α) $2y^2-8y+16>0$, $y\in R$

Β) $2\alpha^2+2\alpha+1>0$, $\alpha\in R$

Γ) $(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\geq-3\beta^2$, $\alpha,\beta\in R$

2.104 Αν $\alpha,\beta\in R$ αριθμοί να δείξετε ότι:

Α) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0$,

Β) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

2.105 Συγκρίνετε τους αριθμούς 2^{51} και 3^{34}.

2.106 Αν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου και ισχύει ότι $\alpha^2+\beta^2\leq 2\gamma(\alpha+\beta-\gamma)$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

2.107 Αν για τους $\alpha,\beta,\gamma>0$ ισχύει ότι $\alpha\beta\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)+\beta\gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)+\gamma\alpha\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right)\leq 0$ να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma$.

2.108 Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in R^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2\geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

2.109 Για κάθε $\alpha,\beta\in R$ να δείξετε ότι

Α) $(\alpha+\beta)^2\leq 2(\alpha^2+\beta^2)$,

Β) $(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)^2\leq 4(1+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6)$.

2.110 Αν α,β θετικοί ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε $3\alpha+4\beta=120$, να αποδειχτεί ότι $30<\alpha+\beta<40$.

2.111 Αν είναι $x,y>0$ και $x^3+y^2\leq 64$ να αποδείξετε ότι $x^4+y^3<512$.

2.112 Αν α,β,γ πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι

Α) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

Β) $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\geq\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

2.113 Δείξτε ότι $\frac{1}{2}<\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\ldots+\frac{1}{2000}<1$

2.114 Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει μήκος x cm και πλάτος y cm, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $3\leq x\leq 5$ και $1\leq y\leq 2$, τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y διπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου

2.115 Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4\leq x\leq 7$ και $2\leq y\leq 3$, τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

2.116 Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha,\beta\in R$.

α) Να δείξετε ότι $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α,β.

β) Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2.117 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α,β, με $\alpha>0$ και $\beta>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4$ β. $\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

2.118 Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις:

$|-7| = \dots,\ |\sqrt{2}-1| = \dots,\ |3-\pi| = \dots,\ |\sqrt{2}-2| = \dots$

$|-\alpha^2| = \dots,\ |-x^2-\pi| = \dots,\ |\sqrt{2}-1| = \dots\ |x^2+2|$

$|x^2-4x+4| = \dots,\ |\eta\mu 38^0 - 1| = \dots\ |-\alpha^2-1| = \dots$

2.119 Αν $\alpha<\beta<\gamma$ να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση $A = 3|\alpha-\beta| - 2|\gamma-\alpha| + 3|\beta-\gamma|$.

2.120 Αν $-3<x<2$ γράψτε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις: $A = 2|x+3| - 6|x-2| + x - 1$

$\Delta = |2-x| - |x-4|$

2.121 Αν $-1<x<2$ να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $A = |x+1| + |x-2| + |x+2| + |x-3|$

$B = 6\cdot|2x+3| + 3\cdot|4x-9|$

2.122 Αν $-1<\alpha<\beta<2$ να απλοποιήσετε την παράσταση: $|\alpha-\beta| + |2\alpha+3| - |3\beta-7|$

2.123 Γράψτε χωρίς απόλυτα τις παραστάσεις

$A = x + |8-2x|$, $\quad B = |-2x-6|$, $\Gamma = x - |4-3x|$

2.124 Αν $1<x<2<y$, να αποδείξετε ότι:

$|1-x| + |2-y| + |x-y| - |2y-1| = -2$

2.125 Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές τις παραστάσεις $A = \left|-x^2-|x|\right|$ $\quad B = |x^2-8x+20|$

$\Gamma = |x^4-2x^2+2|$ $\Delta = \left||x|+3\right| - \left||x|-x+1\right| + |-x^2-5|$

2.126 Να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις: $\Delta = -|-2x+4| + |2x-4|$,

$E = 2|x+3| - |2-x| + 1$ $\quad$, $\Sigma T = |2-x| + |x^2+4|$.

2.127 Αν $\alpha \in R - \{0\}$ να δειχτεί ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$.

2.128 Να αποδείξετε τις ισότητες:

Α) $|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = 2\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)$.

Β) $|\alpha^2 - 2\beta - 3| = |2\beta - \alpha^2 + 3|$

Γ) $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{|\alpha|}{\alpha}$, $(\alpha \neq 0)$

2.129 Για κάθε $x, y \in R$, να αποδείξετε ότι:

Α) $|x+y|^2 - |x-y|^2 = 4xy$

Β) $(x+|x|)(x-|x|) = 0$

Γ) $(|x|+|y|)(|x|-|y|) = x^2 - y^2$

Δ) $|xy| + xy + x|y| + y|x| \geq 0$

2.130 Αν $x = \frac{\kappa}{|y|+|\kappa|}$, $m = \frac{y}{|\kappa|+|y|}$ να αποδείξετε ότι $|x| + |m| = 1$.

2.131 Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in R$ να αποδείξετε ότι

$|\alpha-\beta| \leq |\alpha-\gamma| + |\gamma-\beta|$

2.132 Να αποδείξετε ότι

Α) Αν $|x| = 1$, $|y| = 2$, $|z| = 4$ τότε $|x+y-z| < 7$

Β) Αν $x,\ y \in R^*$ με $|x| + |y| < 1$, τότε $0 < |x| < 1$ και $0 < |y| < 1$

2.133 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι:

$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \leq \left|\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

2.134 Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq \frac{1}{2}$ τότε $|3x - 2y + 2| \leq 7$

Β) Αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$ τότε $|2x - 3y + 1| \leq 9$

Γ) $|x| \leq 2 \Rightarrow |x^2 - 2x + 6| \leq 14$

2.135 Για κάθε $\alpha,\beta \in R$ με $\alpha\cdot\beta\cdot(3\alpha+2\beta)\neq 0$ αποδείξτε ότι $\frac{|2\alpha+3\beta|}{|3\alpha+2\beta|}\leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\leq 1$

2.136 Αν α,β,γ πραγματικοί αριθμοί με $xyz\neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}\leq 3$

2.137 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x,y\in R^*$ ισχύει

Α) $\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{y}{x}\right|\geq 2$, αν $x,y\neq 0$. Β) $\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\left|\frac{1}{x}\right|$

2.138 Αν $|\alpha-1|<5$ και $|\beta-2|<3$ βρείτε μεταξύ ποιων τιμών μεταβάλλεται η παράσταση $\alpha+\beta$.

2.139 Αν $x\neq 0$ και $y\neq 0$, βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση $A=\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y}$

2.140 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\frac{x^2}{|x|}$ Β) $\frac{x^2-1}{|x|+1}$ Γ) $\frac{9-x^2}{15+5|x|}$

2.141 Να βρεθεί το x όταν: $d(x,3)\leq 7$, $d(2,x)=2$, $d(x,2)>3$ $d(x,-1)>2$.

2.142 Δίνονται οι παραστάσεις $A=|x-2|$ και $B=|2x-6|$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2\leq x<3$ δείξτε ότι $2A+\frac{1}{2}B=x-1$.

β) Υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$;

2.143 Δίνονται τα x,y τέτοια ώστε:

$-9\leq 2x-3\leq 3$ και $3\geq\frac{1-y}{2}\geq -2$

Α) Να αποδείξετε ότι: $|x|\leq 3$, $|y|\leq 5$

Β) Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $K=2x-3y-21$

2.144 Έστω ότι τα σημεία A, B, M παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2<x<7$.

α) Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων. $|x+2|$, $|x-7|$ και $|x+2|+|x-7|$

β) Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: .

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά και αλγεβρικά.

2.145 Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$, με x,y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$. Να αποδείξετε ότι: $A=x-y+2$ και ότι $0<A<4$.

2.146 Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$

β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

2.147 Δίνονται οι παραστάσεις $A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2\leq x<3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$.

β) Υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2.148 Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$. Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

2.149 Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y για τα οποία ισχύουν: $|x-3|\leq 2$ και $|y-6|\leq 4$

α) Να δείξετε ότι $1\leq x\leq 5$ και $2\leq y\leq 10$

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y.

ΡΙΖΕΣ

2.150 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά: **i)** $\sqrt{(2\sqrt{2}-4)^2}$

ii) $\sqrt{x^2-2x+1}$ iii) $\sqrt{x^2y^4}$ **iv)** $\sqrt{\dfrac{x^2}{4}}$

2.151 Για κάθε $x \neq 0$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις: $\sqrt[6]{x^{18}}$, $\sqrt[3]{x^6}$, $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, $\sqrt{(2x)^2}$.

2.152 Αν $-3<x<2$, να απλοποιήσετε την παράσταση Α= $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{x^2+6x+9}$

2.153 Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\frac{\sqrt{x^2+4\cdot x+4}}{x+2}-\frac{\sqrt{x^2-4\cdot x+4}}{x-2}\ , \ \text{αν}\ \ -2<x<2.$$

2.154 Έστω $K=\dfrac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3}-\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες η η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν $-3<x<5$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή

2.155 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{27}\right)\cdot\left(\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{108}\right)$,

Β) $\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{50}-\sqrt{45}+\sqrt{125}\right)$,

Γ) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

2.156 Να αποδείξετε ότι :

$$\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{50}-\sqrt{45}+\sqrt{125}\right)=30$$

2.157 Αν $x=1-3\sqrt{2}$ να υπολογίσετε την παράσταση $A=\dfrac{\sqrt{2}}{x}-\dfrac{3}{x^2}$

2.158 Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=1.$$

2.159 Να βρείτε την τιμή της παράστασης $B=3x^2+5xy+3y^2$ όταν $x=\dfrac{3}{6-\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{3}{6+\sqrt{3}}$

2.160 Αν x,y>0 και $x\neq y$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=x+y+\sqrt{xy}$$

2.161 Να υπολογίσετε τον αριθμό

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

2.162 Αν $\alpha>0$ να δείξετε ότι:

Α) $\alpha>1\Leftrightarrow\sqrt{\alpha}<\alpha$ Β) $\alpha<1\Leftrightarrow\sqrt{\alpha}>\alpha$.

2.163 α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{51}<4$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{51}$ και $6-\sqrt[3]{51}$

2.164 Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

Α) $\dfrac{4}{5-\sqrt{2}}$ Β) $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ Γ) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$ Δ) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$

Ε) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$ Στ) $\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$ Ζ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

2.165 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, Β) $\sqrt{9-\sqrt{32}}$, Γ) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

2.166 Να δείξετε ότι: $\sqrt{10+2\sqrt{15}}>\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

2.167 Συγκρίνετε το $\sqrt{2}$ με το $\sqrt{10}-2$

2.168 Να αποδείξετε ότι:

Α) $\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{9}}-\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{9}}=\dfrac{2}{3}$

Β) $\sqrt{\dfrac{1}{\left(\sqrt{7}+3\right)^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}}\in Q$,

Γ) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$.

2.169 Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός

$$\frac{\sqrt{1001+\sqrt{2001}}-\sqrt{1001-\sqrt{2001}}}{\sqrt{2}}$$ είναι φυσικός.

2.170 Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=\sqrt{1+1999\sqrt{1+2000\sqrt{4+2000\sqrt{1+2003\cdot 2005}}}}\ .$$

2.171 Να αποδείξετε ότι $A=B$ όταν :

$$A=\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^{8}+\frac{1}{\left(7-4\sqrt{3}\right)^{8}}\right]\cdot\frac{\left(14-8\sqrt{3}\right)^{8}}{2^{9}}$$

και

$$B=\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2005}+\frac{1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2005}}\right]\cdot\frac{\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)^{2005}}{2^{2006}}$$

2.172 Αν $\alpha,\beta,\gamma\ge 0$ να δείξετε ότι:

α) $\alpha+\beta\ge 2\sqrt{\alpha\beta}$

β) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\ge 8$

2.173 Να υπολογίσετε τα $\left(2-\sqrt{2}\right)^3$, $\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ και να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\sqrt[3]{20-14\cdot\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\cdot\sqrt{2}}\ .$$

2.174 Δείξτε ότι $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{34}-3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{34}+3}=5$

2.175 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt[3]{5\cdot\sqrt[5]{25\cdot\sqrt{25\cdot\sqrt{5}}}}$.

Β) $\sqrt{75+\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{15+\sqrt{1}}}}}$.

Γ) $\sqrt{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$.

2.176 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $\left(2-\sqrt{2}\right)^3$, $\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ και να απλοποιήσετε την παράσταση $\sqrt[3]{20-14\cdot\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\cdot\sqrt{2}}$

2.177 Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

Α) $\sqrt{5}$ και $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Β) $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt{2}$

Γ) $\sqrt{3}$ και $\sqrt{2}+1$

2.178 Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

Α) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}$ Β) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-1}$

Γ) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$ Δ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

2.179 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-2\right)^6}$ Β) $\sqrt[9]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^3}$

2.180 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, $\sqrt{9-\sqrt{32}}$, $\sqrt{8+\sqrt{60}}$

2.181 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$\sqrt{63}-7\sqrt{3}+\sqrt{147}-2\sqrt{7}-\dfrac{7}{\sqrt{7}}$ είναι ακέραιος.

2.182 Να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς $3\sqrt{11}$, $4\sqrt{7}$, $5\sqrt{5}$, $6\sqrt{3}$, $7\sqrt{2}$

2.183 Αν $\alpha>0,\ \beta>0$ να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\le\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}}$$

2.184 Δίνεται η παράσταση:

$A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

2.185 Α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$.

Β) Συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$

3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.01 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\frac{1}{x+2}=\frac{x}{x^2-4}$ Β) $\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-2x+1}=0$.

3.02 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x-\left(\frac{2x}{3}-5\right)=6-\left(\frac{x}{3}-2\right)$

β) $5-\left(\frac{t+1}{2}+\frac{1+2t}{3}\right)=12-\left(t-\frac{t+5}{6}\right)$

3.03 Δίνεται η εξίσωση $\lambda\cdot x=x+\lambda^2-1$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1),\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση.

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο R

3.04 Να λυθούν για κάθε $\lambda\in R$ οι εξισώσεις:

Α) $(\lambda-1)x=\lambda$ Β) $\lambda x+1=x+\lambda$

Γ) $(\lambda-1)x=\lambda^2-1$ Δ) $\lambda^2x+1=\lambda(x+1)$

Ε) $\lambda^2(x-3)=\lambda x-3$ Στ) $\lambda^2x+3=3x+\lambda$.

3.05 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $(x+\alpha)^2-(x-\beta)^2=2\alpha(\alpha+\beta)$, $\alpha,\beta\in R$.

Β) $\alpha\left[(x+\alpha)^2-(x-\alpha)^2\right]=4x+\alpha^2+\alpha$, $\alpha\in R$

3.06 Από τις ισότητες $v=v_0+\alpha t$ και $S=v_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2$, να δείξετε ότι $S=\frac{v+v_0}{2}t$.

3.07 Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε την λύση αυτή.

3.08 Ένα βαρέλι Α περιέχει 524 κιλά κρασί των 2 ευρώ το κιλό και ένα βαρέλι Β περιέχει 456 κιλά κρασί των 1,5 ευρώ το κιλό. Αφαιρούμε από κάθε βαρέλι την ίδια ποσότητα κρασιού και βάζουμε αυτή που αφαιρέσαμε από το Α στο Β και αυτή που αφαιρέσαμε από το Β στο Α. Αν μετά το ανακάτεμα των κρασιών, το περιεχόμενο των δύο βαρελιών έχει την ίδια αξία, να βρείτε πόσα κιλά μεταφέρθηκαν από το ένα βαρέλι στο άλλο.

3.09 Ένα ελαιουργείο έχει δύο συγκροτήματα το Α και το Β. Όταν δουλεύουν και τα δύο μαζί τελειώνουν όλες τις ελιές μίας περιοχής σε 12 μέρες. Φέτος ξεκίνησαν μαζί και μετά από 2 μέρες το Α σταμάτησε οριστικά λόγω βλάβης ενώ το Β συνέχισε να δουλεύει. Το Β έχει τα $\frac{2}{3}$ της απόδοσης του Α . Να βρείτε σε πόσες μέρες συνολικά θα τελειώσουν οι ελιές της περιοχής

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ε ΑΠΟΛΥΤΑ

3.10 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $3|4x-4|=3$ Β) $|7x-3|=-2$,

Γ) $|x-3|=7$ Δ) $|2x-5|=5-2x$.

Ε) $|x-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ Στ) $|x+\sqrt{2}|=\sqrt{2}$

3.11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $|2x-4|=3$ Β) $|7x-3|=|9x+5|$,

Γ) $|x-3|=2x$ Δ) $|2x-5|=2x-5$.

3.12 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $\frac{|x-1|-3}{2}-\frac{|2-2x|}{6}=\frac{1}{2}-\frac{|x-1|}{6}$,

Β) $1-\frac{|2x-1|-1}{4}=|1-2x|-\frac{|6x-3|-2}{8}$.

3.13 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $||x-1|+2|=1$ Β) $|x^2-9|+|x^2-5x+6|=0$

Γ) $|x-2|=2|x+1|$ Δ) $|x+1|+|x-5|=20$

3.14 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $|4-|x||=||x|+3|$ Β) $|x|+x=4$

Γ) $||x|-2|-3|=1$ Δ) $||x|-2|=3$.

3.15 Α) Δείξτε ότι: $\left(\frac{x}{|x|}-1\right)(x+|x|)=0$, $x\neq 0$.

Β) Λύστε την εξίσωση $\lambda\frac{x}{|x|}=\lambda^2x+\lambda+1$, $\lambda\in R$.

3.16 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $x^4=-x$ Β) $x^4+x=0$

Γ) $5x^6+3x^2=0$ Δ) $2x^{10}+x^3=0$

3.17 Α) Να λυθεί η εξίσωση $x^3+8=0$ (1).

Β) Αν η εξίσωση: $4\alpha^4x^2-1=0$ και η (1) έχουν κοινή λύση να βρείτε το α.

Γ) Αν η εξίσωση $(\beta+1)^5x^{10}+32=0$ και η (1) έχουν κοινή λύση να βρείτε το β.

3.18 Δίνεται η παράσταση

$A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$. Να δείξετε ότι $A=4$ και να λύσετε την εξίσωση $|x+A|=1$.

3.19 Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$ |,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε;

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Επιβεβαιώστε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

ΔΕΥΤΕΡΒΑΘΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ

3.20 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α) $x^2-4x=0$ Β) $3x^2=4x$

Γ) $2x^2+x-15=0$ Δ) $4x^2-1=0$

Ε) $x^2-6x+7=0$ ΣΤ) $3x^2-x=0$

3.21 Αν $x^2=xy+12y^2$ με $x,y\in R^*$ να βρείτε τις τιμές του $\frac{x}{y}$

3.22 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις ως προς x για κάθε τιμή των παραμέτρων τους

Α) $\alpha\beta x^2-(\alpha\gamma+\beta)x+\gamma=0$, $\alpha\beta\neq 0$.

Β) $\alpha\beta x^2-(\alpha-\beta)x-1=0$, $\alpha\cdot\beta\neq 0$.

Γ) $\beta^2x^2-2\alpha\beta^2x+\alpha^2\beta^2-1=0$, $\beta\neq 0$

3.23 α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-3x-4=0$ (1).

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

i) **Αποδείξετε ότι ο** $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

3.24 Αν η εξίσωση $x^2-2x-2(\alpha\beta-1)=0$ έχει ως ρίζα τον αριθμό $\alpha+\beta$, αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$

3.25 α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$3x^2-14x+8=0$ (1) και $8x^2-14x+3=0$ (2).

β) Έστω οι εξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (3) και $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ (4), με $\alpha\cdot\gamma\neq 0$. Αποδείξτε ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) τότε:

i) $\rho\neq 0$ και

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

3.26 Λύστε την εξίσωση $x^2+\Delta+11=(\Delta+6)x$ όπου Δ είναι η διακρίνουσά της

ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

3.27 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ ώστε η εξίσωση $\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)x^2+2(\lambda-2)x+1=0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές.

3.28 Να βρεθεί ο $\lambda \in R$ ώστε η εξίσωση $\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)x^2+(\lambda-2)x+3=0$:

Α) να έχει μία μόνο ρίζα,

Β) να έχει διπλή ρίζα.

3.29 Έστω η εξίσωση $\lambda x^2+x+5=0,\ \lambda \in R$.

Α) Για ποιες τιμές του λ έχει μία μόνο ρίζα;

Β) Για ποιες τιμές του λ έχει διπλή ρίζα;

Γ) Αν ρ είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης, να υπολογίσετε την παράσταση $\sqrt{(x-\rho)^2}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

3.30 Η εξίσωση $\lambda^2x^2+(5\lambda-2)x+\lambda+2=0$, $\lambda \in R$ έχει ρίζα το -1. Να βρείτε το λ και μετά να δείξετε ότι το -1 είναι διπλή ρίζα.

3.31 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^2+2(\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=0$, $\alpha,\beta,\gamma \in R$ έχει μια διπλή ρίζα, αν και μόνον αν $\alpha=\beta=\gamma$.

3.32 Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $(2\alpha-\beta)x^2-4\alpha x+4\beta=0$, $\alpha,\beta \in R-\{0\}$ έχει διπλή ρίζα, τότε η εξίσωση $\left(\alpha^2+\beta^2\right)x^2-2x+3(\alpha-\beta)=0$ έχει ρίζες άνισες.

3.33 Αν η εξίσωση $x^2-2\beta x+2\gamma=0$, $\beta,\gamma \in R$, είναι αδύνατη στο R, να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+3\beta x+5\gamma=0$ δεν έχει ρίζες στο R.

3.34 Για ποιες τιμές του $\alpha \in R$ οι εξισώσεις $x^2-\alpha x+1=0$ και $x^2-x+\alpha=0$ έχουν κοινή ρίζα;

3.35 Λύστε την εξίσωση $|x+1|+\left(x^2+x\right)^2=0$

3.36 Αν η εξίσωση $x^2+\mu x+\kappa=0$ έχει διπλή ρίζα, δείξτε ότι το ίδιο θα συμβαίνει και για την εξίσωση: $\left(1-\kappa+\frac{\mu^2}{2}\right)x^2+\mu(1+\kappa)x+\kappa(\kappa\text{-}1)+\frac{\mu^2}{2}=0$

3.37 Αν $\alpha,\beta,\gamma \in (0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι μια τουλάχιστον από τις παρακάτω εξισώσεις έχει ρίζες πραγματικές , $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$, $\gamma x^2+2\alpha x+\beta=0$, $\beta x^2+2\gamma x+\alpha=0$

3.38 Αν $\alpha,\beta,\gamma \in R^*$ και ισχύει: $\alpha+\beta^2+2\alpha\gamma=29$ και $\beta+\gamma^2+2\alpha\beta=18$ και $\gamma+\alpha^2+2\beta\gamma=25$, να υπολογιστεί η τιμή του $\alpha+\beta+\gamma$

3.39 Δίνεται η εξίσωση: $2x^2+\lambda x-36=0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2-\lambda x-36=0$

ii) Να δείξετε ότι : $\rho \neq 0$ και ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2+\lambda x+2=0$.

3.40 Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο $\gamma^2x^2+\left(\gamma^2-\alpha^2+\beta^2\right)x+\beta^2$ όπου τα α,β,γ είναι μήκη πλευρών ενός τριγώνου δεν έχει πραγματικές ρίζες.

3.41 α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4-8x^2-9=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες

β) Θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους $\beta,\gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: Αν $\gamma<0$ τότε: **i)** $\beta^2-4\gamma>0$.

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΆΘΡΟΙΣΜΑ – ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΡΙΖΩΝ

3.42 Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-5x-2=0$ να υπολογισθούν οι παραστάσεις:

Α) x_1+x_2 **Β)** x_1x_2 Γ) $(1+x_1)(1+x_2)$

Δ) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ Ε) $x_1^2+x_2^2$ Στ) $x_1^3+x_2^3$

3.43 Να βρείτε, στις περιπτώσεις που οι εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες, το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών τους, χωρίς να τις λύσετε.

i) $x^2-8x+12=0$ iv) $3x^2-4x+12=0$

ii) $4x^2-17x+1=0$ v) $x^2-171=0$

iii) $x^2-4x+4=0$ vi) $6x^2+12=0$

Β) Για τις εξισώσεις που έχουν πραγματικές ρίζες x_1,x_2, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$x_1x_2^2+x_1^2x_2$, $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$, $x_1x_2^3+x_1^3x_2$ και $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}$

3.44 Δίνεται η εξίσωση $x^2-3x-1=0$ με ρίζες x_1,x_2. Βρείτε τις τιμές των παραστάσεων $x_1^2+x_2^2$, $x_1^3+x_2^3$, $\frac{x_1}{x_2+1}+\frac{x_2}{x_1+1}$ και $x_1(x_1-3)$.

3.45 Έστω ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\sqrt{2}x^2-4x-1=0$. Υπολογίστε τις παραστάσεις:

$\rho_1^2+2\rho_1\rho_2+\rho_2^2$, $\frac{\rho_1^2}{\rho_2}+\frac{\rho_2^2}{\rho_1}$, $|\rho_1-\rho_2|$, $|\rho_1|+|\rho_2|$

3.46 Έστω η εξίσωση $x^2+\beta x+\gamma=0$, $\gamma<0$

Α) Αν x_1,x_2 οι δύο ρίζες της εξίσωσης να γράψετε συναρτήσει των αριθμών β,γ τις παραστάσεις x_1+x_2, x_1x_2, $x_1^2+x_2^2$.

Β) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1,x_2)=\sqrt{\Delta}$, όπου Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης.

3.47 Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2+\lambda-1=0$ να βρεθεί ο πραγματικός λ, έτσι ώστε να ισχύει: $3x_1^3+8x_1x_2^2+8x_1^2x_2+3x_2^3=192$.

3.48 Έστω η εξίσωση $\sqrt{\alpha}x^2+(\sqrt{\alpha}+\beta)x+\beta=0$ όπου είναι $\alpha,\beta\in R$ με $\alpha>0$.

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες για οποιεσδήποτε τιμές των α,β.

Β) Αν x_1,x_2 οι δύο ρίζες της εξίσωσης να αποδείξετε ότι $x_1+x_2+x_1x_2=-1$.

Γ) Αν μία ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός $-\sqrt{\alpha}$ με $\alpha\neq1$, να αποδείξετε ότι $\beta=\alpha$

3.49 Έστω η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x-\lambda=0$

Να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε να έχει ρίζες αντίθετες

3.50 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^2-7x+2=0$ έχει δύο θετικές ρίζες x_1, x_2 και στη συνέχεια να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων: x_1+x_2, x_1x_2, $x_1^2+x_2^2$. $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$

3.51 Να σχηματίσετε μια δευτεροβάθμια εξίσωση που να έχει ρίζες το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $-3x^2-20x+7=0$.

3.52 Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που οι ρίζες της έχουν άθροισμα 7 και γινόμενο 10

3.53 Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

3.54 Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 9 και γινόμενο -52

3.55 Αν x_1,x_2 είναι ρίζες της $x^2-5x-7=0$, να βρεθεί εξίσωση που να έχει ρίζες τις:

Α) $\rho_1=2x_1-1$, $\rho_2=2x_2-1$,

Β) $\rho_1=x_1+x_2$ και $\rho_2=x_1x_2$.

3.56 Δίνεται η εξίσωση $x^2+10x+20=0$ η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2. Βρείτε το πρόσημο του $x_1+x_2^{2005}$

3.57 Δίδεται η εξίσωση $x^2-(2\lambda+1)x+2\lambda^2+\lambda=0$ η οποία έχει δύο πραγματικές ρίζες , τις x_1, x_2. Να αποδείξετε ότι: $0\le x_1+x_2\le 2$ και $0\le x_1^2+x_2^2\le 2$.

3.58 Ένας μαθητής αντί της εξίσωσης $x^2+\alpha x+\beta=0$ (1), έλυσε την $x^2+\beta x+\alpha=0$ και βρήκε δύο ρίζες. Από αυτές η μία ήταν ίση με μία ρίζα της (1) και η δεύτερη ήταν μικρότερη κατά 3 της άλλης ρίζας της (1). Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β.

3.59 Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in R$ αν οι ρίζες της $x^2+\alpha x+\beta=0$ είναι οι αριθμοί α και β.

3.60 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες η εξίσωση $x^2-2x+(\lambda+2)=0$ έχει:

Α) δύο ρίζες ετερόσημες ,

Β) δύο ρίζες θετικές και άνισες ,

Γ) δύο ρίζες αντίστροφες.

3.61 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in R$ η εξίσωση $x^2-(\lambda-2)x-2\lambda=0$, $\lambda\neq-2$ έχει δύο ρίζες άνισες.Βρείτε για ποιες τιμές του λ έχει ρίζες

Α) αντίθετες Β) αντίστροφες

Γ) ομόσημες Δ) ετερόσημες

Ε) θετικές ΣΤ) αρνητικές

3.62 Να βρεθεί δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής $x^2+\beta x+\gamma=0$, όπου $\beta,\gamma\in R$ που να έχει ως λύσεις τους αριθμούς $\beta+1$ και $\gamma+1$

3.63 Ας είναι Δ, S, P , η διακρίνουσα , το άθροισμα το γινόμενο των ριζών των εξισώσεων, αντίστοιχα , Να βρείτε τις ρίζες τους

Α) $x^2-\Delta x+5=0$

Β) $\Delta x^2-Px+S=0$, $\Delta>0$

Γ) $x^2-Px+\Delta=0$

3.64 Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+4(\lambda-1)=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $(x_1+x_2)^2+x_1x_2+5=0$.

3.65 Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $A=\dfrac{1}{5+\sqrt5}$ και $B=\dfrac{1}{5-\sqrt5}$

3.66 Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1 και x_2

β) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{1}{x_1}$ και $\dfrac{1}{x_2}$.

3.67 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2x+\lambda=0$, με παράμετρο $\lambda<1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Να δείξετε ότι: $x_1+x_2=2$.

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον: $|x_1-2|=|x_2+2|$, τότε να δείξετε ότι: $x_1-x_2=4$ και να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ.

3.68 Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha+\beta=-1$ και $\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-12$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α,β και να τους βρείτε.

3.69 Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20$ cm και εμβαδό $E = 24$ cm^2.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου.

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

3.70 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε $x_1x_2 = -3$.

3.71 Δίνεται το τριώνυμο:

$\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

α) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii_ να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1 \cdot x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

3.72 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $(x_1+x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$.

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = x_1{}^2x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1x_2{}^2$

3.73 Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το $S = x_1 + x_2$ $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές;

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2}$.

3.74 Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνεται τους αριθμούς $\frac{x_1+x_2}{2}$ και 1.

ΤΡΙΩΝΥΜΟ – ΜΟΡΦΕΣ

3.75 Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

i) x^2-6x+5 v) $3t^2+18t$

ii) $3x^2-4x+1$ vi) $25\omega^2+20\omega+4$

iii) $5p^2-25$ vii) y^2-2y-3

iv) x^2-4x+4 viii) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

3.76 Απλοποιήστε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\dfrac{x^2+3x-18}{x^2+4x-12}$ β) $\dfrac{x^2-25}{x^2-6x+5}$

γ) $\dfrac{x^2-5x+4}{3x^2-11x-4}$ δ) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$

3.77 Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

Α) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$ Β) $\dfrac{4a^2-9}{4a^2-8a+3}$

Γ) $\dfrac{x^2+(2\kappa+\lambda)x+2\kappa\lambda}{x^2-\lambda^2}$ Δ) $\dfrac{x^2-\alpha x-6\alpha^2}{x^2+5\alpha x+6\alpha^2}$

Ε) $\dfrac{x^2+(\alpha-\beta)x-2\alpha^2-2\alpha\beta}{x^2+(4\alpha+\beta)x+3\alpha^2+3\alpha\beta}$

3.78 Δίνεται το τριώνυμο:

$f(x)=\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$ με $\lambda>0$.

α) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda>0$.

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να δείξετε ότι $\Pi\geq 4$ για κάθε $\lambda>0$.

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο;

3.79 Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2-5x+\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha|\leq\frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες, που είναι αντίστροφοι πραγματικοί αριθμοί.

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha=2$.

γ) Να λύθεί η εξίσωση: $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$

3.80 Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$x^2-4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+16=0$, με $\lambda\in(0,4)$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 16$, για κάθε $\lambda\in(0,4)$.

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16;

3.81 Ένας επενδυτής πούλησε μια μετοχή αντί 21 euro και υπολόγισε ότι ζημιώθηκε τόσο επί τοις εκατό όσο την αγόρασε. Να βρείτε πόσα euro έχασε (2 λύσεις).

3.82 Ένα βαρέλι περιέχει 54 lt κρασί. Βγάζουμε μια ποσότητα κρασί και προσθέτουμε την ίδια ποσότητα νερού. Μετά ξαναβγάζουμε την ίδια ποσότητα από το μείγμα. Στο βαρέλι παραμένει ένα μείγμα που περιέχει 24 lt καθαρό κρασί. Να βρείτε πόσα λίτρα κρασί βγάλαμε αρχικά.

3.83 Σε μια γεωργική περιοχή αναλογεί ως έκτακτη ενίσχυση, εξ΄ αιτίας φυσικής καταστροφής, το ποσό των 3000 euro. Σε κάθε παραγωγό αναλογεί το ίδιο ποσό. Επειδή είχε γραφτεί κατά λάθος ένας παραγωγός παραπάνω, τον έσβησαν και οι υπόλοιποι πήραν, ο καθένας 100 euro περισσότερα. Να βρείτε πόσοι ήταν τελικά οι δικαιούχοι. (Απ: 5

4 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

4.01 Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{(1-2x)(x-3)}{2}+2x>-(x+1)^2$$

4.02 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\frac{x-2}{3}-\frac{12-x}{2}>\frac{5x-36}{4}-1 \quad \text{και}$$

$$\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}\le 2+\frac{3x-1}{15}$$

4.03 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων

$$\frac{x}{2}+1>\frac{x}{4}-\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{x}{2}-\frac{1}{3}\le\frac{x}{6}-1$$

4.04 Βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων.

$$3(x-1)+2x<x+1,\ 2(x+3)-x\ge 2,\ -6\le\frac{3x-6}{3}\le 7$$

4.05 Να λύσετε το (Σ): $\begin{cases} 2x-4<x+1 \\ \dfrac{x-7}{2}\ge\dfrac{x}{3}-8 \end{cases}$

4.06 Να λύσετε τα συστήματα

A) $-2<\dfrac{2x-1}{3}<4$ B) $-2<\dfrac{-2x-1}{3}<-1$

4.07 Να λύσετε τα συστήματα:

A) $-2<-x-\dfrac{x+1}{2}<4$

B) $-5<\dfrac{1-x}{2}+1<-1$

4.08 Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ να λύσετε τις ανισώσεις

A) $\lambda(x-1)>\lambda^2$ B) $\lambda x>x+2$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

4.09 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $|x-1|<5$ B) $|5-x|-6>0$

Γ) $|2x-1|<-1$ Δ) $|1-2x|>-4$

4.10 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $|2x+3|\ge 6$ B) $|x+4|\le 0$

Γ) $1<|3x-2|<3$ Δ) $|x+6|\ge 0$

4.11 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $-2\le|x|\le 5$ B) $2|x|<x+5$

Γ) $|2x-1|\ge 2x-1$ Δ) $|x+5|\le 1$

4.12 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $3<|1-2x|\le 5$ B) $3\le|x|\le 8$

Γ) $1\le|2x+3|\le 9$ Δ) $|2x-1|>4$

4.13 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $||5x+3|+2|\le 6$ B) $||x+3|-1|<2$

4.14 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $|3-|2x+1||\le 2$ B) $||x+1|-4|<3$

Γ) $|1-|x-1-|1-x|||<2$ Δ) $|1-|1-x||\le 1$

4.15 Αν $|x|<1$, γράψτε χωρίς απόλυτα την παράσταση $A=2|x+3|-6|x-2|+x-1$ και την παράσταση: $B=|2-|x+1||+|2+|x-1||$

4.16 Να λύσετε τις ανισώσεις

A) $1\le|x-1|\le 6$ στο R^*

B) $-1\le|2x-5|\le 4$ στο R_-

Γ) $0\le|x-2|-1\le 3$, στο R_+

Δ) $\left|x-\dfrac{1}{4}\right|<4$ στο Z

4.17 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων: $-|15x-23|<7$ και $\left|\dfrac{4}{3x-2}\right|>\dfrac{1}{3}$

4.18 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $\dfrac{|2006-x|+|x-2006|}{3}\geq 2$

Β) $\dfrac{2|3-x|-1}{3}-|3-x|>\dfrac{|x-3|-8}{3}+1$

Γ) $2|x|+3|x-1|>5x-2$

4.19 Βρείτε τις τιμές του x ώστε να ισχύουν: $(|x|-2)(2|x|-30)=0$ και $|x+5|\geq 7$

4.20 Αν $|\alpha|\leq 1$, όπου $\alpha\in Z$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A=\alpha^{2005}+3$

4.21 Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται κάθε μια από τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt{|x|-1}$ Β) $\sqrt{2|x|+6}$

Γ) $\sqrt{|x+3|-2}$ Δ) $\sqrt{4-|x|}$

Ε) $\sqrt{1-|x-2|}$ Στ) $\sqrt{2|x|-6}$

4.22 Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται κάθε μια από τις παρακάτω παραστάσεις:

Α) $A=\sqrt{5-|1-x|}+\sqrt{|x+2|-1}$

Β) $B=\sqrt{1-2|1-2x|}$

4.23 Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

Α $f(x)=\sqrt{|x|-2}-\sqrt{(x^2+4)(|x|+3)}$

Β $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}+4}{\sqrt{|6-x|}}$

Γ $k(x)=\dfrac{1}{|6-x|}+\sqrt{x-1}$

Δ $m(x)=\sqrt{|6-x|}+\sqrt{4-x}$

4.24 Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$, να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

4.25 α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\geq 5$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α), (β).

4.26 Αν x,y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4|\geq 3$.

β) Αν $\alpha\geq$ -1, να γράψετε την παράσταση $A=||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5)\leq 9$. Να δείξετε ότι: $|x+4|+|x-14|=18$.

4.27 α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-3|\leq 5$.

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-3|$.

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-3|\leq 5$.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-3|\leq 5$.

4.28 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

4.29 Να κάνετε πίνακα προσήμων για τις παραστάσεις:

Α) $4-x$ Β) $4-x^2$

Γ) x^2-5x+6 Δ) x^2-4x+3

Ε) $4+x^2$ Στ) x^2-4x

4.30 Να κάνετε πίνακα προσήμων για τις παραστάσεις:

Α) $1-x^2$ Β) $3-x^2$

Γ) x^2-2x+1 Δ) x^2-x+3

Ε) $4+x^2$ Στ) $3x-x^2$

4.31 Να κάνετε πίνακα προσήμων για τις παραστάσεις:

Α) $5-x^2$ Β) x^2-2

Γ) $-2x^2+12x-18$ Δ) $x-1-x^2$

Ε) $-4-x^2$ Στ) x^2-6x

4.32 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $4-x^2\geq 0$ Β) $3x^2-5x+2\geq 0$

4.33 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $-x^2+x-1>0$ Β) $-x^2+x-1\leq 0$

4.34 Να λυθούν οι ανισώσεις:

Α) $\dfrac{x+1}{7-x}>2$ Β) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+2}\leq 2$,

Β) $\dfrac{2x^2-4x+5}{x^2+2}>1$ Δ) $\dfrac{4x}{3x-x^2}\geq\dfrac{1}{2}$.

4.35 Να λύσετε τα συστήματα ανισώσεων:

Α) $5<x^2-14x+50<26$ Β) $-2<\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}<1$

4.36 Να συναληθεύσετε τις ανισώσεις

$\dfrac{3x+5}{3x-7}<0$ και $\dfrac{x^2-10x+16}{x-2}<0$;

4.37 Βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

Α) $1-x^2<0$ και $x^2-3\geq 0$

Β) $x^2>2x-1$ και $x^2-x\geq 0$

Γ) $4+x^2\geq 0$ και $3x\geq x^2$

4.38 Για κάθε $\kappa\in R$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $x^2-\kappa x+2\kappa-3=0$

4.39 Να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $|x-1-x^2|<|x^2-3x+4|$

Β) $\left|x^2-6x+8\right|\leq 4-x$

Γ) $|x^2-3x-3|>|x^2+7x-13|$

4.40 Να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $\left|x^3-1\right|\leq x^2+x+1$.

Β) $\left|-x^2+x-4\right|>2(x+1)$

4.41 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\sqrt{3x^2-4x+1}$

Β) $f(x)=\sqrt{-4x^2+4x+3}+3\sqrt{-x^2+2x}$

4.42 Το τριώνυμο $f(x)=x^2-5x-6$ έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 6. Ποια από τις παρακάτω ανισότητες είναι σωστή; Α) $f(0,1999)>0$,

Β $f(0,1999)\leq 0$, Γ) $f(1999)<0$ Δ) $f(-1999)>0$

4.43 Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε η εξίσωση $(\lambda^2-3\lambda+2)x^2+(\lambda-2)x+3=0$

Α) Να έχει μία μόνο ρίζα

Β) Να είναι αδύνατη.

4.44 Έστω $f(x)=(\lambda+2)x^2-2\lambda x+3\lambda$, $\lambda\neq -2$

Α) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η ανίσωση $f(x)<0$ να αληθεύει για κάθε $x\in R$

Β) Αν $\lambda=-4$ να λύσετε την εξίσωση $\left|f(x)\right|=-8x+18$

4.45 Δίνεται η εξίσωση

$\left(\lambda^3-\lambda\right)x^2+\lambda x+\lambda(1+\lambda)(1-\lambda)=0$

A) Βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες

B) Υπάρχει τιμή του λ ώστε να έχει η εξίσωση άπειρες ρίζες;

4.46 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ ώστε η ανίσωση: $(\lambda-1)x^2+(\lambda+1)x+\lambda+1>0$ να είναι αδύνατη για κάθε $x\in R$.

4.47 Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ, βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)x^2+(\lambda-2)x+3=0$.

4.48 Να βρείτε το λ ώστε το τριώνυμο $(\lambda-1)x^2-4x+\lambda+2$ να έχει:

A) σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in R$,

B) αρνητικό πρόσημο για κάθε $x\in R$.

4.49 Να βρεθούν αν υπάρχουν οι τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες η ανίσωση $(\lambda-2)x^2-2\lambda x+3\lambda<0$ να αληθεύει για όλες τις πραγματικές τιμές του x.

4.50 Να προσδιοριστεί ο $\lambda\in R^*$ ώστε η ανίσωση $\lambda x^2+(\lambda-1)x+(\lambda-1)<0$ να είναι αληθής για κάθε $x\in R$.

4.51 Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $-x^2+(2\lambda-1)x+\lambda^2+\lambda+1=0$, $\lambda\in R$ να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε $x_1^2+x_2^2+3x_1x_2\geq 0$.

4.52 A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$ (1) με $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$. έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Αν x_1 και x_2 είναι οι δύο ρίζες της (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1-x_2|>1$.

4.53 Έστω $f(x)=x^2-(\lambda+4)x+\lambda+6$, $x,\lambda\in R$

A Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές

B Αν x_1, $x_2\in R$ είναι ρίζες του $f(x)$ βρείτε:

α) για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ ισχύει $x_1^2+x_2^2<20$

β) για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ ισχύει $|x_1-x_2|=2$

4.54 Έστω x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$ $\lambda\in R$. Να βρεθεί ο λ ώστε να ισχύει $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\geq 1$.

4.55 A) Να λυθεί στο R, η εξίσωση

$x^2-(\lambda+1)x+2\lambda-2\lambda^2=0$ (1), $\lambda\in R$

B) Βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ ισχύει ότι $d(x_1,x_2)<2$ όπου x_1, $x_2\in R$ οι ρίζες της (1)

4.56 Έστω η εξίσωση $x^2+3x+1=0$ με ρίζες τις α,β. Αποδείξτε ότι $\left(\frac{\alpha}{\beta+1}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\alpha+1}\right)^2=18$

4.57 Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ με $\alpha,\beta\in R$. Αν x_1, $x_2\in R$ είναι οι ρίζες του $f(x)$ και ισχύει $|f(x_1+x_2)-5|+|x_1^2x_2+x_1x_2^2-30|=0$

A Να δείξετε ότι $\alpha=-6,\ \beta=5$

B Να λυθεί η ανίσωση $f(|x-3|-4)<0$

4.58 Αν για τους αριθμούς α,β,γ ισχύει $\gamma(\alpha+\beta+\gamma)<0$, $\alpha\neq 0$, να αποδείξετε ότι:

A) Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δεν μπορεί να έχει ρίζες τους αριθμούς 0 και 1.

B) Η $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο ρίζες άνισες.

Γ) Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι: $(x_1x_2)(1-x_1)(1-x_2)<0$.

Δ) Να αποδείξετε ότι μία μόνο ρίζα της εξίσωσης θα είναι στο διάστημα $(0,1)$

4.59 Δίδεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x-2$ με $x\in IR$ και $\alpha\neq 0$.

Α Αν ισχύει η σχέση $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in IR$ να αποδείξετε ότι $f(100)<0$

Β Αν ισχύει η σχέση $\alpha+\beta>2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (mathematica.gr)

4.60 Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$3(\alpha+\beta+1)^2+1\geq 3\alpha\cdot\beta$ (mathematica.gr)

4.61 Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του πραγματικού α ώστε η εξίσωση $x^2-2x+\alpha=0$ να έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

4.62 Αν για κάθε $x\in IR$ ισχύει:

$(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$ να δείξετε ότι: $\alpha=\beta$

4.63 Για ποιες τιμές της παραμέτρου μ , μία ακριβώς ρίζα της εξίσωσης $x^2-2(\mu+1)x+\mu^2=0$ ανήκει στο διάστημα $(0,2)$; (mathematica.gr)

4.64 Έστω η εξίσωση $x^2+x-3=0$ που έχει ρίζες τις x_1,x_2 Βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

$A=x_1^3-4x_2^2+19$ και $B=x_2^3-4x_1^2+19$

4.65 Έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x-2001$ με $\alpha\neq 0$.

Να αποδείξετε ότι:

A) Αν $P(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ τότε $P(2004)<0$.

B) Αν είναι $\alpha+\beta>2001$, τότε η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x-2001=0$ έχει ρίζες πραγματικές.

4.66 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $\left(x^2-7x+12\right)\left(3x-x^2\right)\left(x^2+2x+6\right)\geq 0$,

B) $x\left(x^2-3x+2\right)\left(2x^2+5x\right)\left(1+x+x^2\right)<0$.

4.67 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $(x+2)^2\left(2x^2-5x-3\right)\left(x^6+2\right)>0$,

B) $(x-5)(x+1)^2(x+2)(x-3)<0$.

4.68 Να λυθούν οι ανισώσεις:

A) $\dfrac{-x^2+5x+6}{x^2+x-6}>0$, B) $\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}\geq 0$,

Γ) $\dfrac{(x^2-8x+7)(x^2-3x+9)}{x^2-4}<0$

4.69 $(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\neq -2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις άνισες ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση: $(x_1+x_2-1)^2+(x_1\cdot x_2+3)^2=0$.

4.70 Δίνεται η εξίσωση $x^2-\beta x+\gamma=0$ με β,γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1+x_2|=4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β.

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma<4$.

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2-\beta|x|+3=0$ (1) . Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

4.71 Δίνεται η εξίσωση:

$x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$ (1) , με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς x_1,x_2 και $d(x_1,x_2)$ είναι η απόσταση των x_1,x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει: $d(x_1,x_2)=\sqrt{24}$.

4.72 α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δύο ρίζες άνισες πραγματικές

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$.

4.73 Έστω το τριώνυμο: $x^2-6x+\lambda-7$, $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7<\lambda<16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2-6|x|+\lambda=7$ (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

δ) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda=3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες;

4.74 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha-1)(1-\beta)>0$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β.

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=|\alpha-1|+|1-\beta|$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας είτε, γεωμετρικά είτε αλγεβρικά

4.75 α) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$

β) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2-3x+1<0$

4.76 Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $d(x,-2)<1$. Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$ β. $x^2+4x+3<0$

4.77 α) Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2-4x+1\leq 0$

β) Αν α,β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

4.78 Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$.

4.79 Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=3x^2+9x-12$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

4.80 Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0$, με $\lambda\in(0,2)$

α) Να βρείτε: την περίμετρο Π και το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

β) Να αποδείξετε ότι $E\leq 1$, για κάθε $\lambda\in(0,2)$

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1;

4.81 Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2|<3$ (1) και $x^2-2x-8\leq 0$ (2)

α) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,4]$.

β) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

4.82 Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1|\le 2$ (1) και $x^2-x-2>0$ (2).

α) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[-3,-1)$.

β) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι $\rho_1-\rho_2\in(-2,2)$.

4.83 α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-5x+6 για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

β) Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2+(2-\lambda)x+\lambda-2=0$ (1) με παράμετρο λ

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

4.84 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $x_{1,}\,x_2$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0<d(x_{1,}\,x_2)<2$

4.85 α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-5x-6<0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\cdot\frac{46}{47}-6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ) Αν $\alpha\in(-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$.

4.86 α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2<x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0<\alpha<1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: $0\,,1\,\alpha\,,\alpha^2\,,\sqrt{\alpha}$.

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha\,,\alpha^2\,,\frac{\alpha+\alpha^2}{2}$.

iii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha}$.

4.87 Δίνεται η εξίσωση $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες ίσες;

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\frac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου $S\,,P$ το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

4.88 Να λύσετε τις εξισώσεις $|x+3|+|x^2+9x+18|=0$ και $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18$.

4.89 Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης $|x-1|\le 3$ και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x\ge 0$.

4.90 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1, x_2)=\frac{1}{d(x_1, x_2)}$.

4.91 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Να βρείτε το λ, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2-x+\lambda-\lambda^2}$ να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

4.92 Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-x+\lambda-\lambda^2$ με $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και x_1,x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1<x_2$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$.

ii) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$f(x_2),\quad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),\quad f(x_2+1)$.

4.93 Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

γ) Για $\lambda>2$, να αποδείξετε ότι οι ρίζες x_1,x_2 της (1) είναι αριθμοί θετικοί και ότι $x_1+4x_2\geq 4$.

4.94 Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=3x^2+\kappa x-4$ με παράμετρο $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες;

γ) Αν x_1,x_2 οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δύο πραγματικοί ώστε να ισχύει: $\alpha<x_1<x_2<\beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)$.

4.95 Δίνεται το τριώνυμο: x^2-2x-8

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

β) Αν $\kappa=-\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2-2\kappa-8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός;

γ) Αν ισχύει $-4<\mu<4$, ποιο είναι το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2-2|\mu|-8$;

4.96 Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha\neq 0$, με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Αποδείξετε ότι: $\gamma=2\alpha$ και $\beta=-3\alpha$.

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x\in(1,2)$, τότε: Να αποδείξετε ότι $\alpha<0$ και να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2+\beta x+\alpha<0$.

5 ΠΡΟΟΔΟΙ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

5.01 Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο όταν το άθροισμα των $S_{20}=1030$ και $\alpha_{10}-\alpha_3=35$.

5.02 Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία είναι $S_{20}=610$ και $S_{12}=222$.

5.03 Για ποια τιμή του ακεραίου x οι αριθμοί $x-1$, $3x+5$, $2x+9$ είναι διαδοχικοί αριθμητικής προόδου;

5.04 Βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με άθροισμα 33 και γινόμενο 440.

5.05 Αν οι αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι οι $\alpha^2-\beta\gamma$, $\beta^2-\gamma\alpha$, $\gamma^2-\alpha\beta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος των διαφορών των δυο προόδων αυτών;

5.06 Αν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}+\sqrt{\alpha_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\alpha_{\nu-1}}+\sqrt{\alpha_\nu}}=\frac{\nu-1}{\sqrt{\alpha_\nu}+\sqrt{\alpha_1}}$$

5.07 Αν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ είναι -μη μηδενικοί- διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_3\alpha_4}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}=\frac{\nu-1}{\alpha_1\alpha_\nu}.$$

5.08 Να παρεμβάλετε μεταξύ του 5 και του 50 όρους ώστε να αποτελούν όλοι μαζί διαδοχικούς αριθμητικής προόδου και ο τελευταίος από τους παρεμβαλλόμενους όρους να είναι 3-πλάσιος από τον δεύτερό τους;

5.09 Σε αριθμητική πρόοδο ισχύει $\alpha_7+\alpha_{17}=30$ και $\alpha_9+\alpha_{20}=40$. Να βρείτε το άθροισμα των όρων της που βρίσκονται μεταξύ του α_8 και α_{25}.

5.10 Αποδείξτε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu=4\nu-5$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι αριθμητική πρόοδος. Να βρείτε το άθροισμα των όρων της που είναι μεταξύ των αριθμών 17 και 99.

5.11 Για μια ακολουθία ισχύει $S_\nu=3\nu^2+\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Αποδείξτε ότι είναι αριθμητική πρόοδος.

5.12 Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 1,2,3,4,5,... και παίρνουμε ομάδες όρων ως εξής: $\{1\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5,6,7\}$, $\{4,5,6,7,8,9,10\}$ ... Να υπολογιστεί το άθροισμα των όρων της ν-οστής ομάδας.

5.13 Έχουμε ν κιβώτια μέσα στα οποία τοποθετούμε αριθμημένες μπάλες ως εξής: Στο πρώτο κιβώτιο τη μπάλα με τον αριθμό $\{1\}$ στο 2ο τις μπάλες $\{2,3\}$ στο 3ο τις $\{4,5,6\}$ κ.ο.κ.

Α. Πόσες μπάλες έχει το ν-οστό κιβώτιο;

Β. Να δειχτεί ότι στο ν-στό κιβώτιο η μπάλα με τον μικρότερο αριθμό είναι η $\frac{\nu(\nu-1)}{2}+1$.

Γ. Σε ποιο κιβώτιο βρίσκεται η μπάλα με τον αριθμό 100;

Δ. Αν $\nu=50$, πόσες μπάλες έχουμε συνολικά;

5.14 Να αποδείξετε ότι σε κάθε αριθμητική πρόοδο με $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει ότι

$$\left(\frac{\lambda-\mu}{\nu}\right)\mathcal{S}_\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{\lambda}\right)\mathcal{S}_\lambda+\left(\frac{\nu-\lambda}{\mu}\right)\mathcal{S}_\mu=0$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

5.15 Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο σε κάθε μια από τις περιπτώσεις:

Α) Αν $S_4 = 30$ και $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 480$.

Β) Αν $S_3 = 26$ και $\alpha_4 - \alpha_1 = 52$.

5.16 Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε σε καθέναν από τους αριθμούς 2, 16, 58 για να γίνουν τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

5.17 Να βρεθούν τρεις αριθμοί που αποτελούν αύξουσα γεωμετρική πρόοδο, αν το άθροισμά τους είναι 65 και η διαφορά των άκρων όρων τους είναι 40.

5.18 Να βρεθούν τέσσερις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν έχουν γινόμενο 16 και άθροισμα μεσαίων όρων 5.

5.19 Αν (α_ν), (β_ν) είναι δυο γεωμετρικές πρόοδοι εξετάστε σε ποια περίπτωση σχηματίζεται γεωμετρική πρόοδος:

$2\alpha_\nu + 3$, $\quad 2\alpha_\nu + 3\beta_\nu$, $\quad (\alpha_\nu)^2$, $\quad \alpha_\nu \cdot \beta_\nu$

5.20 Να αποδειχτεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^\nu$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

5.21 Σε μια γεωμετρική πρόοδο έχουμε $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$. Να βρεθεί ο λόγος της.

5.22 Να βρείτε τέσσερις ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως τα εξής:

α) οι τρεις πρώτοι είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου,

β) οι τρεις τελευταίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και

γ) το άθροισμα των άκρων όρων είναι 14 και των μεσαίων 12.

5.23 Βρείτε τρεις αριθμούς οι οποίοι: είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, έχουν άθροισμα 15 και αν σε αυτούς προσθέσουμε τους αριθμούς $1, 4, 19$ αντίστοιχα θα γίνουν διαδοχικοί γεωμετρικής προόδου.

5.24 Αν $\alpha\beta$, β^2, γ^2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί β, γ, $2\beta - \alpha$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

5.25 Α) Να δειχθεί ότι η ακολουθία για την οποία ισχύει ότι $S_\nu = 2(3^\nu - 1)$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

Β) Πόσους όρους της πρέπει να πάρουμε, για να έχουμε άθροισμα 484;

5.26 Να αποδείξετε ότι ο Αριθμητικός μέσος δύο θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού μέσου τους

5.27 Να βρεθούν τρεις αριθμοί x, y, ω αν αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, έχουν άθροισμα 28 και αν ο μεσαίος αυξηθεί κατά 2 τότε οι αριθμοί που προκύπτουν είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

5.28 Οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και οι αριθμοί $\alpha, \beta - 3, \gamma - 5, \delta - 5$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

(mathematica.gr)

5.29 Μια μπάλα πέφτει από ύψος 60 μέτρων και αναπηδά σε έδαφος φθάνοντας κάθε φορά στο $\frac{1}{3}$ του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης. Να βρείτε σε τι ύψος θα φθάσει στην 6^η αναπήδηση.

6 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

6.01 Απλοποιείστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2} & \text{αν } x\neq 2\\ 3 & \text{αν } x=2\end{cases}$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης: $f(-1)\left[f(0)+2f(2)\right]$

6.02 Έστω οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1\\ 2x, & x\geq 1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-x+1 & x<0\\ \sqrt{x} & x\geq 0\end{cases}$ Βρείτε τα $f(-1)$, $f(0)$, $f(\sqrt{3})$, $f(3/4)$, $g(0)$.

6.03 Αν $f(x)=2x-6$, να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in R$ ώστε να ισχύει: $f(\alpha)=8$ και $f(8)=\beta$.

6.04 Για την συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3-2\beta x$ ισχύουν $f(1)=-2$ και $f(2)=20$. Βρείτε το $f(3)$

6.05 Έστω ότι $f(x)=\begin{cases}\alpha x-4, & x\leq 1\\ \alpha x-2\beta, & x\geq 1\end{cases}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε f(-1)=f(2).

6.06 Αν $f(x)=\begin{cases}2x & |x|\leq 3\\ 5x+1 & x>5\end{cases}$ βρείτε για ποια τιμή του $\lambda\in R$ ισχύει $-2f(-1)+\lambda f(10)=157$.

6.07 Αν $f(x)=3x$, να δείξετε ότι:

A) $f(\alpha+1)+f(\alpha+2)+f(\alpha+3)=3f(\alpha)+18$.

B) $f(\kappa\alpha+\lambda\beta+\mu\gamma)=\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)+\mu f(\gamma)$.

6.08 Αν για την συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3-2\beta x$ ισχύουν $f(1)=-2$ και $f(2)=20$ να βρείτε το $f(3)$

6.09 Αν $f(x)=2x-1$ για κάθε $x\in R$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $f(x+3)$, $f(1-x^2)$, $f(2x+f(0))$, $f(x+f(x))$.

6.10 Αν $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}$ τότε να δείξετε ότι ισχύει $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

6.11 Αν $f(x)=x^2, x\in R$, δείξτε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in R$ ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

6.12 Αν $f(x)=x^2-x$ να λύσετε την εξίσωση $f(x+1)-2f(x)+3f(0)=f(1)$.

6.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x+\alpha$, όπου $\alpha\in R$ και $f(-3)=6$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

B) Να βρείτε τη τιμή του α

Γ) Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f;

6.14 Αν $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2}$ δείξτε ότι $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

6.15 Αν για την συνάρτηση f ισχύει $xf(x)+f(-x)=x$ τότε να βρεθεί ο τύπος της

6.16 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+1$

A) Να βρείτε τη g με $g(x)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

B) να υπολογίσετε τα $g(0)$, $g(1)$.

6.17 Αν $f(x)=-2x+5$, να αποδείξετε ότι το κλάσμα $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ είναι ανεξάρτητο των x_1, x_2

6.18 Αν $f(x)=x^2-x$, $x\in R$ να λύσετε την εξίσωση $f(x+1)-2f(x)+3f(0)=f(1)$.

6.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x$, $x\in R$.

Αν $1-2\kappa=\frac{1}{\lambda}$, δείξτε ότι $f(\kappa-\lambda)-f(\kappa)-\lambda^2>0$.

6.20 Αν $f(x)=2x-1$, $x\in R$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

Α) $f(x+3)$ Β) $f(1-x^2)$

Γ) $f(2x+f(0))$ Δ) $f(x+f(x))$

6.21 Αν $f(x)=x^2$, $x\in R$ να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in R$ ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

6.22 Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{1-x}$ να αποδείξετε ότι $f(f(f(x)))=x$, $x\neq 0,1$

6.23 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4, & \text{αν } x<1 \\ x^2-3x-4, & \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Β) Να βρεθούν οι τιμές $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(3)$

Γ) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x)=0$

6.24 Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} |\alpha|\frac{x^2-2}{2}+\beta^2, & x<1 \\ 2|\alpha|x^2-2\beta^2x-2, & x\geq 1 \end{cases}$$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β) Αν ισχύει ότι $f(-2)=f(0)$ και $f(1)=-2$ να υπολογισθούν τα α,β.

6.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x+\alpha$, όπου $\alpha\in R$ και $f(-3)=6$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Β) Να βρείτε τη τιμή του α

Γ) Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f;

6.26 Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{-x^2+42x}$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

Β) Να λύσετε την εξίσωση:

$[x-f(1)]^2+[x+f(1)]^2=2004$

6.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{-x^2+3x+18}}{x-3}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

β. Να δείξετε ότι $f(0)=-\sqrt{2}$ και $f(5)=\sqrt{2}$.

γ. Να δείξετε ότι $\frac{1}{1+f(0)}+\frac{1}{1+f(5)}=-2$.

6.28 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} (\alpha+1)^5x, & \text{άν } x\geq 1 \\ -29x-3, & \text{άν } x\leq 1 \end{cases}$$ όπου $\alpha\in R$.

Α) Να βρείτε την τιμή του α.

Β) Λύστε την εξίσωση: $x^2(x^2-2)=f(0)+2$

6.29 Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+x-4$.

Α) Να βρείτε το πρόσημο του $f(x)$

Β) Λύστε την ανίσωση: $|-x^2+x-4|>2(x+1)$.

6.30 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2x-3}{x-1}, & \text{αν } x>\frac{3}{2} \\ \frac{4x-5}{x-7}, & \text{αν } 0\leq x\leq\frac{3}{2} \end{cases}$$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f καθώς και το $f(2)$

Β) Αν το $f(2)$ είναι μια λύση της εξίσωσης $x^2+(\alpha^2+2\beta)x+\beta=0$ να υπολογίσετε τα $\alpha,\beta\in R$ και την άλλη λύση της εξίσωσης.

6.31 Δίνεται η συνάρτηση f, με:

$$f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\le 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$ και να λύσετε την εξίσωση $f(x)=25$.

6.32 Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y=35+0{,}8x$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

6.33 Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(A=90^o)$ με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x,y τέτοια, ώστε: $x+y=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$E(x)=\frac{1}{2}\left(-x^2+10x\right)$, $x\in(0,10)$.

β) Να αποδείξετε ότι $E(x)\le\frac{25}{2}$ για κάθε $x\in(0,10)$.

γ) Για ποια τιμή του $x\in(0,10)$ το $E(x)$ γίνεται μέγιστο; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ;

6.34 Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει: ότι $|1-3\alpha|<2$ και ότι η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3}<\alpha<1$.

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta-3\alpha-1|<3$.

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

6.35 Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ.

β) Για $\kappa=1$ & $\lambda=-2$, απλοποιήστε τον τύπο της g και να δείξετε ότι $g(\alpha+3)>g(\alpha)$, όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)$

6.36 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης αποδείξτε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\lambda-\lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

6.37 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των:

Α) $f(x)=\dfrac{2x}{9-x^2}$ Β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{4\text{-}x}}{x\text{-}3}$

Γ) $h(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2-4x+3}$ Δ) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

6.38 Βρείτε τα πεδί6α ορισμού:

Α) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{2x+2}{x^2-5x+6}$

Β) $f(x)=\dfrac{4x+1}{(4x-3)^2-(5-3x)^2}$

6.39 Βρείτε τα πεδί6α ορισμού των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=\sqrt{2-x^2}$ Β) $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$

Γ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ Δ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

6.40 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$ Β) $f(x)=\dfrac{4x-6}{25-x^2}$

Γ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+x^2}}$ Δ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

6.41 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των:

$f(x)=\dfrac{3}{|x-2|-1}$ $g(x)=\dfrac{1}{|x|+x^2}$

$m(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}\,|}$ $k(x)=\sqrt{2-|x+3|}$

6.42 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των:

Α) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ Β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{|x|-2}$

Γ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x^3-x}$ Δ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{|x|+4}}{|x|-2}$

6.43 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2}}-3$

Β) $f(x)=\dfrac{|x|-1}{x^2-1}-\dfrac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$.

6.44 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Α) $h(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2-4x+3}+\dfrac{\sqrt{x-5}}{x^3-12x^2+36x}$

Β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{4\text{-}x}}{x\text{-}3}$

6.45 Για ποιες τιμές του $\alpha \in R$ η συνάρτηση

$f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2+\alpha}$ ορίζεται στο R;

6.46 Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$f(x)=\dfrac{x+2\sqrt{x}-3}{x-4\sqrt{x}+3}$

Α) Να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες έχει νόημα ο τύπος της f

Β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

6.47 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x^3-x}$

Β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{|x|-2}$

6.48 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συνάρτησεων

Α) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{x-2}}}{x+|x|}$

Β) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

6.49 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-|x-6|}}+\dfrac{1}{2|x|-13}$

Β) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}+\sqrt{15-x}+\sqrt{-5x+6}$

6.50 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συνάρτησεων

Α) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{|x|}-x}{x^2+1}$

Β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{|x|-x}$

6.51 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{||x|-3|-2}$

Β) $f(x)=\sqrt{-x}+\dfrac{\sqrt[3]{|x|+x}}{|x|+2}$

6.52 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συνάρτησεων

Α) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x-1|-1}}{|x+4|-2|x+1|}$

Β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{-2x+11}}{|x-3|+|x^2-9|}$

6.53 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{|x|-x}$

Β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-|x-1|}}{2x-|x-2|-3}$

6.54 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

Β) $f(x)=2x+\sqrt{x^2-1}+\sqrt{9-x^2}$

Γ) $f(x)=\sqrt{|x|-x}+\sqrt{25-x^2}$

6.55 Βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\lambda\in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{(\lambda-1)x^2+2x+1}$ να έχει πεδίο ορισμού το R

6.56 Έστω συνάρτηση $f(x)=\sqrt{(\lambda-1)x^2}+1$ με πεδίο ορισμού το R

Α) Είναι δυνατόν να ισχύει $\lambda<1$;

Β) Αν το σημείο $(1,2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f να υπολογίσετε το λ

Γ) Για την τιμή του λ που βρέθηκε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ–ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

6.57 Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $Α(1,2)$, $Β(0,1)$, $Γ(2,1)$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

6.58 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x$. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων $Α(1,f(1))$ και $Β(-1,f(-1))$.

6.59 Να βρεθεί σημείο Γ του άξονα xx' τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΓ, ΒΓ, όπου $Α(1,1)$, $Β(4,2)$.

6.60 Δίνονται τα σημεία $Α(-1,-1)$, $Β(2,4)$. Να βρείτε σημείο Μ της ευθείας y=x ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΜΑ και ΜΒ.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

6.61 Δίνονται τα σημεία $Α(3,4α+2)$, $Β(3,-2)$, $Γ(4,2β-6)$, $Δ(3γ+1,4)$, $Ε(1,1)$, και $Ζ(2δ,-1)$. Βείτε τους $α,β,γ,δ\in R$ αν: Τα Α και Β είναι συμμετρικά ως προς τον $x'x$, τα Ε και Ζ είναι συμμετρικά ως προς το $(0,0)$, το Γ βρίσκεται στον $x'x$ και το Δ βρίσκεται στον $y'y$.

6.62 Να βρεθεί η τιμή του λ στις περιπτώσεις :

Α) $Α(|\lambda|,\lambda^2+2)$, $Β(-3,4-5\lambda)$ να είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $Ο(0,0)$.

Β) $Α(\lambda^2,4\lambda)$, $Β(\lambda^2+3,\lambda)$ να είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y=x$.

Γ) $Α(-4,3)$, $Β(-4,|\lambda^2-1|)$ να είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

6.63 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sqrt{x-3}$. Να βρεθεί το $\alpha\in R$ ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $M(4,2)$.

6.64 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $y'y$, $x'x$ και την ευθεία $y=-1$.

6.65 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=(3\mu-1)x+2$ με μ<0. Να βρεθεί το μ ώστε το C_f να τέμνει τους άξονες σε σημεία που απέχουν απόσταση ίση με $\sqrt{5}$.

6.66 Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=x-1$ και $g(x)=-x+1$.

Β) $f(x)=x^3-x$ και $g(x)=x^2-1$.

6.67 Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: f(x)=x+2 , g(x)=-x+3, h(x)=2x+1 στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων και να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από αυτές.

6.68 Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x+4 & ,x<-1 \\ 0 & ,-1\le x\le 2 \\ -x+3 & ,x>2 \end{cases}$.

6.69 Να επιλυθούν γραφικά οι ανισώσεις: $2x-4>0$, $-2x+4>0$, $|x|<2$ και $|x|>2$.

6.70 Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την τιμή του k για την οποία το σημείο M ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Α) $f(x)=x^2+k$, M(2, 6)

Β) $g(x)=kx^3$, M(–2, 8)

Γ) $h(x)=k\sqrt{x+1}$, M(3, 8)

6.71 Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες.

Α) $f(x)=-x+4$

Β) $g(x)=(x-2)(x+6)$

Γ) $h(x)=(x-2)^2$

6.72 Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x+1$ όταν το πεδίο ορισμού της είναι: Α) $[0,+\infty)$ Β) $(-\infty,0)$ Γ) $\{-2,0,1\}$ Δ) $[-2,1)$ Ε) $(-\infty,-1]\cup(0,2)$

6.73 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των

Α) $f(x)=|x|+x-2$

Β) $f(x)=|x-1|+1$

Γ) $f(x)=\begin{cases} x+4 & x<-1 \\ 0 & -1\le x\le 2 \\ -x+3 & x>2 \end{cases}$

6.74 Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=2-|x-2|$.

Α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης g πιο απλά, χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

Β) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση

6.75 Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f καθώς και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.

6.76 Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

6.77 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f και να δείξετε ότι για κάθε x∈Α ισχύει: $f(x)=|x|-2$.

β) Για x∈Α, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$

6.78 Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda\neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι αυτό;

γ) Αν $\lambda\neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$.

6.79 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1,2) για κάθε τιμή του α.

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε: Να βρείτε την τιμή του α και να ελέγξετε αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν και άλλο κοινό σημείο;

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

6.80 Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2-4x+\alpha$ και $g(x)=\alpha x-5$, με $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $f(2)=g(2)$ τότε:

Α) να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$

Β) να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ και την εξίσωση: $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$

6.81 Δίνεται η συνάρτηση : $\mathrm{f}(x)=\sqrt{\dfrac{x-6}{x^2+x-6}}$.

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της .

Β) Να βρεθούν τα σημεία τομής Α , Β της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Γ) Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ .

6.82 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\dfrac{\alpha}{4}}$

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το $\mathbb{R}$.

β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, τότε: Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να λύσετε την εξίσωση $2\cdot f(x)=1$.

6.83 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x+\alpha$, με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Για $\alpha=1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β) Βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

γ) Για $\alpha>1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

6.84 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)^2-4$ και $g(x)=|x-1|+2$ με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

6.85 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases}x-3 & ,\ x>2\\ -x+3, & x<2\end{cases}$

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της με τους άξονες

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 0$.

ΕΥΘΕΙΑ

6.86 Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $y=\sqrt{3}x+3$ με τον άξονα xx΄.

6.87 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y=\frac{\lambda-2}{\lambda}x+\frac{3(2-\lambda)}{\lambda}$.

Να προσδιοριστεί ο λ ώστε η ε να είναι:

Α) παράλληλη στην ευθεία y=-2 ,

Β) παράλληλη στην ευθεία $x+y=5$,

Γ) να διέρχεται από το σημείο (3,-1)

6.88 Για την ευθεία ε: $y=\frac{\lambda+4}{\lambda-1}x+5$, να βρείτε:

Α) Τις τιμές του λ ώστε η ευθεία ε να είναι παράλληλη προς την ευθεία δ: $y=6x+1$.

Β) Τις τιμές του λ ώστε το σημείο $A(2,-3)$ να ανήκει στην γραφική παράστασης της ευθείας ε.

Γ) Τις τιμές του λ ώστε η ευθεία ε να είναι παράλληλη προς τον άξονα xx'.

Δ) Τα σημεία τομής της με τους άξονες.

6.89 Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon: \alpha x+y=4$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M(-1,\ 6)$.

Α) Να βρεθεί η τιμή του α.

Β) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της ευθείας ε με τους άξονες.

Γ) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ε.

Δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας ε με την παραβολή $y=x^2-\frac{13}{4}x+\frac{17}{4}$.

6.90 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\lambda x+2,\ \lambda<0$

Να βρείτε:

Α) Τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες.

Β) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση και τους άξονες.

Γ) Την τιμή του λ ώστε το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου να είναι 2 τμ

6.91 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x-2|+1$.

Α) Να γραφτεί ο τύπος της χωρίς την απόλυτη τιμή.

Β) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

Γ) Να βρείτε –αν υπάρχουν- τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

Δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης με την ευθεία $y=3$.

Ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης και την ευθεία $y=3$

Στ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.

6.92 Έστω τα σημεία $A(\kappa,2)$ και $B(1,2\kappa)$, όπου $\kappa\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι $(AB)=\sqrt{5}|\kappa-1|$.

Β) Αν $(AB)\le\sqrt{5}$ να βρείτε τις τιμές του κ.

Γ) Αν $\kappa=0$ να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=-2x+2$ διέρχεται από τα Α και Β.

6.93 Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που

Α) περνάει από το σημείο $M(1,2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2y-x+5=0$.

Β) περνάει από το σημείο $A(-1,3)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $2x+y+5=0$.

Γ) διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $3y+x-6=0$.

6.94 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία : $A(2,3)$, $B(0,-1)$.

6.95 Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $y=\sqrt{3}x+3$ με τον άξονα $x'x$

6.96 Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από τα σημεία $A(1,2)$, $B(-1,2)$, $\Gamma(-3,4)$

6.97 Να υπολογιστεί η απόσταση του σημείου $A(2,0)$ από την ευθεία : $y=2x+1$.

6.98 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1,6), Β(−1,4) να βρείτε τις τιμές των α,β.

β) Αν $\alpha=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y.

6.99 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με α,β∈IR, για την οποία ισχύει: $f(0)=5$ και $f(1)=3$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=5$.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x'x και y'y.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

6.100 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$, x∈IR.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.

β) Αν Α, Ο, Β είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου Ο(0,0), να αποδείξτε ότι Α, Β είναι συμμετρικά ως προς Ο

6.101 Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού Α της f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$, x∈A.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x>0$.

6.102 Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β.

6.103 Δίνεται η συνάρτηση f, με

$$f(x)=\begin{cases}-x+2, & \text{αν } x<0\\ x+2, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y΄y.

β) **i)** Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.

γ) **i)** Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία;

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii).

6.104 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=3x-4$, x∈IR.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, Δ, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

6.105 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, x∈IR.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα x΄x.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

γ) Έστω Μ(x,y) σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου Μ ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

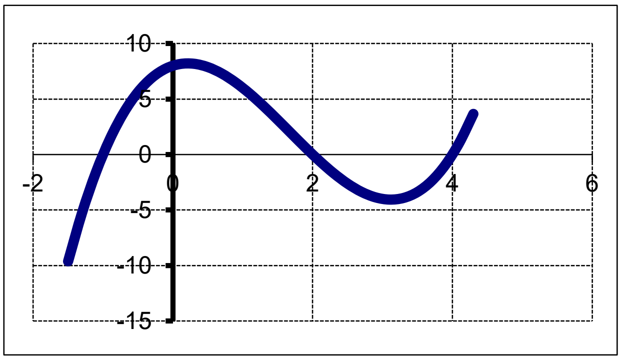
6.106 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Α) Να βρείτε το $f(0)$ και $f(1)$.

Β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=0$.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\le 0$.

Δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)>0$.



6.107 Έστω μια συνάρτηση $y=g(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Παρατηρώντας την γραφική παράσταση να απαντήσετε στα ερωτήματα

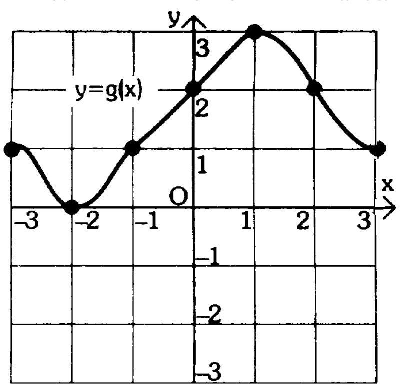
Α) Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της g;

Β) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $g(2)-(g(-2)-g(-3))$.

Γ) Είναι σωστό ότι g(0)>g(3); (γιατί;)

Δ) Για ποιες τιμές του x ισχύει ότι g(x)=1;

Ε) Για ποιες τιμές του x ισχύει ότι g(x)>1;



6.108 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{|x|-1}$.

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Β) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

Γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$.

6.109 Έστω η συνάρτηση f με

$f(x)=\kappa\sqrt{x+1}\ ,\ x\ge -1\ ,\ \kappa\in\mathbb{R}$.

Α) Να βρεθεί η τιμή του κ ώστε το σημείο Α(3,8) να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Για την τιμή του κ που βρήκατε στο Α ερώτημα:

Β) Να βρεθεί η απόσταση των σημείων Α(3 , 8) και Β(8 , f(8)) .

6.110 Αν $f(x)=\begin{cases}2x-3\ , & x<2\\ -2x^2\ , & x\ge 2\end{cases}$, να λυθεί η ανίσωση: $\left|x-\dfrac{f(2)}{4}\right|<3-f(1)$.

6.111 Δίνονται οι συναρτήσεις: $g(x)=x+2$ και $f(x)=\begin{cases}x^2\ , & x\ge 0\\ -1-2x\ , & x<0\end{cases}$. Να βρεθούν τα σημεία τομής των C_f, C_g καθώς και η απόστασή τους.

6.112 Δίνεται η συνάρτηση :

$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{αν } x<0\\ x+6\lambda-\lambda^2 & \text{αν } x\ge 0\end{cases}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

Α) Να βρείτε το λ ώστε $f(0)=f(-8)$.

Β) Αν $\lambda=3$ τότε:

α) Να βρείτε την απόσταση των σημείων $A(3,f(3))$ και $B(-5,f(-5))$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$\sqrt{\left(\sqrt{f(1)}-4\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{f(-9)}+4\right)^2}$.

6.113 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x-1|-2}}{x-4}$.

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

Β. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες και σε ποια σημεία ;

Γ. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\left[f(-1)-3f(7)\right]\left[2f(12)-\frac{9}{8}f(-5)\right].$$

6.114 Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1):\ y=(\lambda-4)x+11$ και $(\varepsilon_2):\ y=(11-2\lambda)x+2$ με $\lambda\in R$.

Α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες.

Β) Για $\lambda=5$:

α) Να γράψετε τη μορφή που παίρνουν οι (ε_1) και (ε_2).

β) Αν Α και Β είναι τα σημεία στα οποία η (ε_1) τέμνει τον $x'x$ και η (ε_2) τον $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την απόσταση (AB).

6.115 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x^2-1}$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

Β) Να αποδείξετε ότι η $f(-x)+f(x)=0$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $|f(x)|>1$.

6.116 Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{αν } x<0\\ x+6\lambda-\lambda^2 & \text{αν } x\geq 0\end{cases}\quad \text{με } \lambda\in R$$

Α) Να βρεθεί ο λ ώστε $f(0)=f(-8)$

Β) Αν $\lambda=3$ τότε:

α) Να υπολογίσετε την τιμή της $\sqrt{3\sqrt[3]{f(18)}}$.

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων $(-3,f(-3))$ και $(0,f(0))$.

6.117 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-|x|}}{x^3-x}$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β) Να αποδείξετε ότι η $f(-x)+f(x)=0$

6.118 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{4-|x|}}$

Α) Να αποδείξετε ότι η $f(-x)+f(x)=0$

Β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\sqrt{(f(2)-1)^2}+\sqrt{(f(-2)-1)^2}$.

6.119 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{10x^2-2|x|}{2-10|x|}$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A_f της f,

Β) Να δείξετε ότι $f(x)=-|x|$, για κάθε $x\in A_f$

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $\left|\dfrac{2x+9}{x+2}\right|=-f(x)$

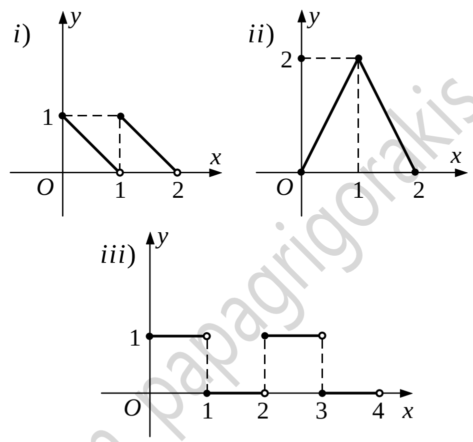
6.120 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|-3}}{x^2-9}$

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

Β) Να αποδείξετε ότι η $f(-x)-f(x)=0$

Γ) Υπολογίστε την τιμή της παράστασης $f(2008)-f(-2008)$.

6.121 Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι:



7 ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

7.01 Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x + 2\lambda - 2 = 0$ (1), $\lambda \in R$.

Α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να έχει 2 πραγματικές και ίσες ρίζες.

Β) Αν $4\lambda = 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{6}{x_1} + \frac{6}{x_2} - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2$.

7.02 Δίδονται τα τριώνυμα $P(x) = -x^2 + 4x - 4$ $Q(x) = x^2 + 1$, $K(x) = x^2 - 5x + 6$.

Α) Να βρεθεί το πρόσημο σε κάθε ένα από τα παραπάνω τριώνυμα για κάθε $x \in R$.

Β) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)\cdot Q(x)}{K(x)} \le 0$

7.03 Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{\alpha}\, x^2 + (\sqrt{\alpha} + \beta)x + \beta = 0$ με $\alpha > 0$, $\beta \in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες για όλες τις τιμές των α, β.

Β) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = -1$.

Γ) Αν μία ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός $-\sqrt{\alpha}$,με $\alpha \ne 1$ να αποδείξετε ότι $\beta = \alpha$.

7.04 Οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης 2ου βαθμού με $S = \rho_1 + \rho_2$, $P = \rho_1 \rho_2$ τέτοια ώστε $P + 2S = 2$ και $P - 2S = -10$.

Α) Να δείξετε ότι S = 3 και P = –4.

Β) Να βρείτε την εξίσωση $x^2 + \kappa x + \lambda = 0$ που έχει ρίζες τους $\rho_1 + 2$ και $\rho_2 + 2$.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \kappa x + \lambda \le 0$

7.05 Έστω η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda = 0$ με $\lambda \ne 2$.

Α) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1;

Β) Για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες;

Γ) Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι δύο οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε για αυτές να ισχύει η ανίσωση: $(\rho_1 + \rho_2) > 2\rho_1\rho_2$.

7.06 Έστω $f(x) = (\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda$, όπου $\lambda \ne -2$.

Α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $f(x) < 0$ αληθεύει για όλες τις πραγματικές τιμές του x

Β) Αν $\lambda = -4$ να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = -8x + 18$.

7.07 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = 2\lambda x^2 + (5\lambda + 2)x + 4\lambda$, $\lambda \ne 0$, βρίσκεται εξολοκλήρου πάνω από την ευθεία $y = -1$.

7.08 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-(\lambda\text{-}1)x\text{-}\lambda$.

Α) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η f να έχει δύο ρίζες άνισες.

Β) Αν x_1, x_2 ρίζες της συνάρτησης f να βρεθεί η τιμή του $\lambda\in R$ ώστε: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=1$.

Γ) Να λυθεί η ανίσωση $d(x,\lambda)<5\text{-}\lambda$ όταν η f έχει μία διπλή ρίζα.

7.09 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\lambda-1)x^2-\lambda^2x+3$ με $\lambda\in IR_+$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια παραβολή που περνά από το σημείο Α(1,0).

Α) Να βρείτε το λ .

Β) Για την τιμή λ=2 να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ) Να σχηματίσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τις $\rho_1=\dfrac{1}{x_1}$, $\rho_2=\dfrac{1}{x_2}$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες της f(x)=0.

7.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\kappa x^2-x+\kappa$, όπου $\kappa\in R$.

Α) Αν $\kappa\neq 0$,για ποιες τιμές του κ, η συνάρτηση f γράφεται σαν τέλειο τετράγωνο ;

Β) Για κ=0 να λυθεί η ανίσωση $f(x)>-\dfrac{100}{x}$.

Γ) α. Βρείτε την τιμή $\kappa\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Μ(1,3).

β. Για την τιμή του κ που βρήκατε στο ερώτημα (α) να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

7.11 Δίνονται οι $A(x)=x^2-4$, $B(x)=2x^2+3x-2$.

Α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις Α(x) και Β(x).

Β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε την παράσταση $f(x)=\dfrac{(x-2)B(x)}{A(x)}$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\geq 0$

7.12 Έστω η εξίσωση $x^2+\lambda x+\lambda\text{-}1=0$ με $\lambda\neq 2$.

Α) Να αποδείξετε ότι έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x_1,x_2 .

Β) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις x_1+x_2 και $x_1\cdot x_2$.

Γ) Να βρείτε το λ ώστε: $(x_1+x_2)^2=5+2\cdot x_1x_2$

7.13 Έστω οι συναρτήσεις: $f(x)=(\lambda+1)x^2-4\lambda x+3$ και $g(x)=x^2+4\mu x+\mu$ με $\mu\neq 0$.

Α) Να βρεθεί η τιμή του $\lambda\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f να είναι ευθεία.

Β) Να βρεθεί η τιμή του $\mu\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της g να εφάπτεται στον xx' .

Γ) Για τις τιμές των λ , μ που βρήκατε να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g .

Δ) Να βρεθούν τα σημεία που τέμνει η C_f τους άξονες x x΄και y y΄ και να βρεθεί το μήκος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου που σχηματίζεται.

7.14 Δίνεται η εξίσωση $x^2+x+\lambda\text{-}1=0$ (1) με ρίζες x_1, x_2.

Α) Να βρείτε για ποια τιμή του λ είναι: $x_1\cdot x_2+3\cdot(x_1+x_2)+5=0$.

Β) Για την τιμή αυτή του λ να λυθεί η (1).

Γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε να σχηματίσετε άλλη εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $\rho_1={x_1}^2$, $\rho_2={x_2}^2$.

7.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν } |x|<1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{αν } |x|\geq 1 \end{cases}$

Α) Να βρείτε τα $f(3)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ και $f(-2)$.

Β) Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων $(-1,f(-1))$ και $(-2,f(-2))$.

Γ) Να βρείτε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $f(-1)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

7.16 Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\alpha+1)x-\alpha^2=0$, $\alpha\in R$ (1).

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε τιμή του α.

Β) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

α) να βρείτε τις τιμές του α ώστε $|x_1+x_2|\leq 2005$

β) για $\alpha=2$, να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες x_1+2 και x_2+2.

7.17 Έστω η εξίσωση $x^2-3x-\mu^2=0$, $\mu\in R$ (1).

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\mu\in R$.

Β) Αν ρ_1,ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του μ:

α) η παράσταση $A=\rho_1\mu+\rho_2(\mu-\rho_1)$ παίρνει το πολύ την τιμή -2.

β) οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\rho_1^2x+2006$ και $\varepsilon_2: y=(27-\rho_2^2)x-2007$ είναι παράλληλες.

7.18 Δίνεται ο πραγματικός αριθμός λ και η εξίσωση $x^2+(1-\lambda)x+1=0$, η οποία έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις x_1 και x_2.

Α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία παίρνει τιμές ο λ.

Β) Να λύσετε την ανίσωση: $(x_1^2+x_2^2+1)(x_1+x_2-2x_1\cdot x_2)<0$, ως προς λ.

7.19 Δίνονται τα τριώνυμα: $P(x)=x^2-5x+4$, $Q(x)=9-x^2$ και $K(x)=x^2+x+1$.

Α) Να λύσετε κάθε μια από τις ανισώσεις: $P(x)\geq 0$, $Q(x)\geq 0$ και $K(x)\leq 0$.

Β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{P(x)}+\dfrac{K(-1)}{\sqrt{Q(x)}}$.

7.20 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)|=2$.

Γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $0\le f(x)\le 2$.

7.21 Για κάθε $\lambda\in R$, δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1):\ y=(\lambda^2+6)x+5$ και $(\varepsilon_2):\ y=5\lambda x+8$.

Α) Να βρείτε –αν υπάρχει- τιμή του λ ώστε η (ε_1) να διέρχεται από το σημείο $(2,4)$.

Β) Να βρείτε το λ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες.

Γ) Αν $\lambda=3$ να βρείτε τα σημεία στα οποία η (ε_2) τέμνει τους άξονες.

7.22 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|-x^2+x-2|-4}{x^2-6x+8}$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Af της f.

Β) Να αποδείξετε ότι: $-x^2+x-2<0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Γ) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f απλοποιείται στη μορφή $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$, $x\in A$.

Δ) Να λύσετε την ανίσωση $x\cdot f(x)>-\dfrac{f(5)}{2}$

7.23 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=(\lambda-1)x^2+(\lambda+1)x+\lambda-1$, όπου το $\lambda\in R$ και $\lambda\neq 1$.

Δ1) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του παραπάνω τριωνύμου $2^{ου}$ βαθμού ως συνάρτηση του λ.

Δ2) Να λύσετε (ως προς λ) την εξίσωση :Δ=0

Δ3) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται εξ ολοκλήρου πάνω από τον άξονα $x'x$.

7.24 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}+\sqrt{x^2-4x+3}$

Γ1) Να λύσετε τις ανισώσεις : α) $-x^2+4x+5\ge 0$, β) $x^2-4x+3\ge 0$

Γ2) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

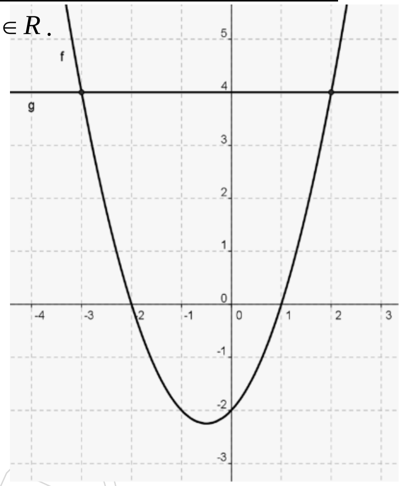
Γ3) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

7.25 Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ με $0<x<3$ και $B=\sqrt[3]{\sqrt{28}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ είναι ανεξάρτητη του x

Β2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B=\sqrt[3]{\sqrt{28}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}$.

Β3. Αν $A=2$ και $B=3$ να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{|\omega-3|-4}{A}+\dfrac{5}{B}=\dfrac{|3-\omega|}{3A-B}$.



7.26 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\kappa.x-2$ και $g(x)=\left(\lambda^5-32\right).x+4$ με $\kappa,\lambda\in R$.

1. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει το άξονα $x'x$ σε δύο διαφορετικά σημεία για κάθε τιμή του $\kappa\in R$.

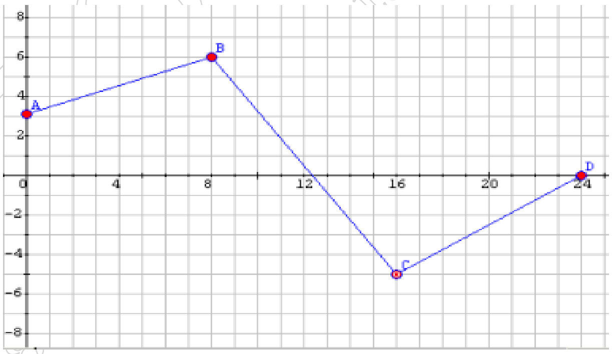
2. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in R$, ώστε η γραφική παράσταση της g να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των f και g, για $\kappa=1$ και $\lambda=2$, να βρείτε:

α) Την τιμή της παράστασης: $A(x)=\dfrac{1}{\sqrt{f(3)-g(x)}}-\dfrac{1}{\sqrt{f(3)+g(x)}}$.

β) Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g

7.27 Έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.



Να βρείτε:

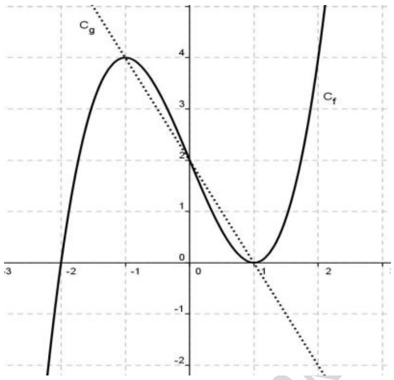
α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f

β) τους αριθμούς $f(0)$, $f(8)$, $f(24)$

γ) το μήκος του τμήματος ΑΒ

δ) την τιμή του $\lambda\in R$ για την οποία το σημείο Κ(16, λ -1) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

7.28 Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f: ℝ→ℝ και της συνάρτησης $g(x)=-2x+2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=-2x+2$

β) Τις τιμές f(−1) , f(0) , f(1).

γ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

δ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

7.29 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, όπου α∈ℝ.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=2x-\alpha$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1,–1).

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.