Α Λυκείου

Γεωμετρία

2016-2017

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Χανιά

Γεωμετρία

241
Ταξινομημένες ασκήσεις για λύση

Ταξη: Α Γενικού Λυκείου
Γεωμετρία
Έκδοση 17.08

Η συλλογή αυτή διανέμεται δωρεάν σε ψηφιακή μορφή μέσω διαδικτύου
προορίζεται για σχολική χρήση και είναι ελεύθερη για αξιοποίηση
αρκεί να μην αλλάξει η μορφή της

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μαθηματικός Μ.Ed.
Χανιά 2016

Ιστοσελίδα: http://users.sch.gr/mipapagr
mail : papagrigorakism@gmail.com

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΟΙΕΣ

1.01 Αν Μ είναι το μέσο τμήματος ΑΒ και Ο σημείο της ημιευθείας ΜΑ, να αποδείξετε ότι αν:
Α) Το Ο δεν ανήκει στο ΑΜ τότε $2OM = OA + OB$
Β) Το Ο ανήκει στο ΑΜ τότε $2OM = OB - OA$

1.02 Σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ , ΒΓ, ΓΔ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να δείξετε ότι

$$MN = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}$$

1.03 Σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ , ΒΓ, ΓΔ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

$$MN = \frac{A\Delta - B\Gamma}{2}$$

1.04 Σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ , ΒΓ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ , ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα, να δειχθεί ότι τα ΔΕ, ΒΖ έχουν κοινό μέσο.

1.05 Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία είναι $2AB=3AM$. Να δείξετε ότι: $3OM=OA+2OB$

1.06 Σε μια ευθεία παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Κ,Α,Μ και Β ώστε $3AM = 4MB$ Να δειχθεί ότι: $7KM = 3KA + 4KB$

1.07 Οι ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$, $\Delta\hat{O}A$ που έχουν μέτρα ανάλογα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να υπολογίσετε τις γωνίες αυτές και να δείξετε ότι οι ημιευθείες ΟΒ και ΟΔ είναι αντικείμενες.

1.08 Σε μια ευθεία παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Κ,Β,Μ και Α ώστε $4BM = 3MA$. Να δειχθεί ότι: $7KM = 3KA + 4KB$

1.09 Από σημείο Ο ευθείας ΑΒ φέρνουμε προς το ίδιο μέρος της ΑΒ ημιευθείες ΟΓ, ΟΔ τέτοιες, ώστε οι γωνίες $A\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$, $\Delta\hat{O}B$ να είναι εφεξής. Αν ΟΕ, ΟΖ είναι οι διχοτόμοι των $A\hat{O}\Gamma$, $\Delta\hat{O}B$ αντίστοιχα και $(E\hat{O}Z)=1000$, να υπολογιστεί η γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta$.

1.10 Δίνεται κυρτή γωνία $A\hat{O}\Gamma$ και εσωτερική ημιευθεία της ΟΒ τέτοια, ώστε η διαφορά γωνιών $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}B$ να είναι 900. Αν ΟΕ, ΟΖ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, να δειχτεί ότι $(E\hat{O}Z)=45^o$.

1.11 Θεωρούμε αμβλεία γωνία $x\hat{O}y$ και τις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ με $OA \perp Ox$ και $OB \perp Oy$ που περιέχονται στη $x\hat{O}y$. Να δειχτεί ότι οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $A\hat{O}B$ έχουν την ίδια διχοτόμο και είναι παραπληρωματικές.

1.12 Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ με άθροισμα μέτρων μικρότερο των 180ο. Αν Ox,Oy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι: $x\hat{O}y = \frac{A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma}{2}$

1.13 Να βρείτε το μέτρο μιας γωνίας φ αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των μέτρων της συμπληρωματικής και της παραπληρωματικής γωνίας της φ είναι ίσο με το εφταπλάσιο του μέτρου της γωνίας φ .

Μ. Ποστάγλου

2 ΤΡΙΓΩΝΑ

2.01 Δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ΄Γ΄ με κορυφή το Α έχουν τις γωνίες ΒΑΓ και Β΄ΑΓ΄ ίσες. Να δειχτεί ότι ΒΒ΄=ΓΓ΄ ή ΒΓ΄=Β΄Γ.

2.02 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η ημιευθεία Αx διχοτόμος της γωνίας Α. Στην Αx παίρνουμε σημεία Κ και Λ ώστε να είναι ΑΚ=ΑΒ και ΑΛ=ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδειχτεί ότι οι γωνίες ΑΓΚ και ΑΛΒ είναι ίσες και ότι ΓΚ=ΒΛ

2.03 Έστω ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ . Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ , ΒΓ, ΓΑ προς τα Β, Γ, Α αντίστοιχα παίρνουμε σημεία Δ,Ε,Ζ ώστε ΒΔ=ΓΕ=ΑΖ. Δείξτε ότι το ΔΕΖ είναι ισόπλευρο

2.04 Δίνεται η οξεία γωνία ΧΟΨ. Κατασκευάζουμε τις ορθές γωνίες ΧΟΖ και ΨΟΤ ώστε η κάθε μία από αυτές να περιέχει την γωνία ΧΟΨ. Επί των ΟΧ και ΟΖ παίρνουμε δυο ίσα τμήματα ΟΜ και ΟΝ και επί των ΟΨ και ΟΤ παίρνουμε δυο ίσα τμήματα ΟΡ και ΟΣ. Να αποδειχτεί ότι οι γωνίες ΟΡΝ και ΟΣΜ είναι ίσες.

2.05 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και δύο ίσες γωνίες ΒΑΧ και ΓΑΨ που κάθε μία τους είναι εφεξής με την γωνία Α. Στις ημιευθείες ΑΧ και ΑΨ παίρνουμε τα σημεία Β΄ και Γ΄ ώστε να είναι ΑΒ΄=ΑΒ και ΑΓ΄=ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΓ΄=ΓΒ΄.

2.06 Στις πλευρές ΑΒ , ΒΓ, ΓΑ ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ ώστε να είναι ΑΔ=ΒΕ=ΓΖ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

2.07 Δύο ίσα ευθ. τμήματα ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Κ ώστε να είναι $ΚΑ \le ΚΒ$ και $ΚΓ \le ΚΔ$. Αν είναι ΑΔ=ΒΓ να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΚ και ΒΓΚ είναι ίσα.

2.08 Στις πλευρές ΟΧ, ΟΨ γωνίας ΧΟΨ παίρνουμε τα σημεία Α , Α΄ και Β , Β΄ αντίστοιχα ώστε να είναι $ΟΑ = ΟΒ$ και ΟΑ΄=ΟΒ΄. Αν Μ είναι σημείο της διχοτόμου της τότε οι γωνίες ΑΜΑ΄ και ΒΜΒ΄ είναι ίσες.

2.09 Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο στο οποίο η βάση ΒΓ είναι μικρότερη από την πλευρά ΑΒ . Στην προέκταση της πλευρά ΑΒ προς το Β παίρνουμε τμήμα ΒΔ=ΑΒ-ΒΓ και στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΕ=ΒΔ. Να αποδείξετε ότι

Α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Β) η γωνία ΑΔΕ ισούται με το ημιάθροισμα των γωνιών ΒΑΓ και ΑΕΔ.

2.10 Δίνονται δυο ίσες οξείες γωνίες ΒΑΓ και ΔΑΕ οι οποίες έχουν κοινή την κορυφή Α και κοινή την γωνία ΔΑΓ. Επί των ΑΔ και ΑΓ παίρνουμε ίσα ευθ. τμήματα ΑΜ=ΑΝ και επί των ΑΒ και ΑΕ παίρνομε δυο ίσα ευθ. τμήματα ΑΡ=ΑΣ Να αποδειχτεί ότι ΜΡ=ΝΣ.

2.11 Να αποδειχτεί ότι δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ που έχουν β=β΄, γ=γ΄ και μβ=μβ΄ είναι ίσα.

2.12 Στις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα δύο σημεία Δ και Ε ώστε να είναι ΑΔ=ΑΕ. Τα ευθ. τμήματα ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο Μ. Να δείξετε.ότι

Α) Τα τρίγωνα ΒΓΜ και ΔΕΜ είναι ισοσκελή

Β) Η ημιευθεία ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.

2.13 Δίνεται μια γωνία ΧΟΨ. Στην πλευρά ΟΧ παίρνουμε τα τμήματα ΟΑ , ΟΒ και στην πλευρά ΟΨ παίρνουμε τμήματα ΟΑ΄=ΟΑ και ΟΒ΄=ΟΒ. Οι ευθείες ΒΑ΄ και Β΄Α τέμνονται στο Γ. Να αποδειχτεί ότι η ΟΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΧΟΨ.

2.14 Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, (ΑΒ = ΑΓ), και οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ που τέμνονται στο Μ. Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, δείξτε ότι ΜΔ=ΜΕ.

2.15 Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ>ΑΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΒΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Γ΄ ώστε ΑΓ΄=ΑΓ και στην προέκταση της πλευράς ΓΑ προς το Α σημείο Β΄ ώστε ΑΒ΄=ΑΒ . Οι ευθείες Β΄Γ΄ και ΒΓ τέμνονται στο Δ. Να δειχτεί ότι:

Α) Το τρίγωνο ΔΓΓ΄ είναι ισοσκελές.

Β) Η διχοτόμος της γωνίας Δ διέρχεται από το Α

2.16 Έστω Μ το μέσο ενός ευθ. τμήματος ΑΒ . Στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία που είναι φορέας του ΑΒ παίρνουμε τα σημεία Κ και Λ ώστε να είναι ΑΚ=ΒΛ και ΜΚ=ΜΛ . Να αποδειχτεί ότι οι γωνίες ΑΒΚ και ΒΑΛ είναι ίσες.

2.17 Έστω μία κυρτή γωνία ΧΟΨ. Στην πλευρά της ΟΧ παίρνουμε δύο σημεία Α και Β και στην πλευρά της ΟΨ δύο σημεία Α΄ και Β΄ ώστε να είναι ΟΑ=ΟΑ΄ και ΟΒ=ΟΒ΄. Αν είναι Γ το σημείο τομής των ΑΒ΄ και ΒΑ΄ να αποδειχτεί ότι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΑ΄Β είναι ίσα και ότι οι γωνίες ΟΓΑ και ΟΓΑ΄ είναι ίσες.

2.18 Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ , ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ προς το μέρος του Α παίρνουμε τμήματα ΑΒ΄=ΑΒ και ΑΓ΄=ΑΓ αντιστοίχως. Να δειχτεί ότι ο φορέας της διάμεσους ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται από το μέσον του Β΄Γ΄

2.19 Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ'. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ του τριγ ΑΒΓ τέμνονται στο Θ, ενώ η αντίστοιχη διάμεσος Α΄Μ΄ και η αντίστοιχη διχοτόμος Β΄Δ΄ του τριγ Α'Β'Γ' τέμνονται στο Θ΄. Να αποδείξετε ότι ΘΔ=Θ΄Δ΄ και ΘΜ=Θ΄Μ΄.

2.20 Να αποδεχτεί ότι δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' που έχουν β=β΄, δα=δα΄ και τις γωνίες τους Α και Α΄ ίσες, είναι ίσα.

2.21 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και στις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΔ=ΑΕ. Αν Ο είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της διχοτόμου ΑΔ (όχι συνευθειακό με τα Δ και Ε) και οι ευθείες ΔΟ και ΕΟ τέμνουν την ευθεία ΒΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα , Να αποδείξετε ότι ΒΖ=ΓΗ [ή ΒΗ=ΓΖ].

2.22 Έστω ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΔ=ΒΓ και τις γωνίες Δ και Γ ίσες. Να αποδειχτεί ότι θα είναι ίσες και οι γωνίες Α και Β.

2.23 Στις πλευρές ΟΧ και ΟΨ μιας γωνίας ΧΟΨ παίρνουμε δυο ίσα ευθ. τμήματα ΟΑ=ΟΒ. Στο εσωτερικό της γωνίας ΧΟΨ φέρνουμε τις ημιευθείες ΟΖ και ΟΤ έτσι ώστε να σχηματίζονται δύο ίσες γωνίες ΧΟΖ και ΨΟΤ που η κάθε μια από αυτές να είναι μικρότερη από το ήμισυ της γωνίας ΧΟΨ. Στις ΟΖ και ΟΤ παίρνουμε δυο ίσα ευθ. τμήματα ΟΜ=ΟΝ. ΟΙ ΑΝ και ΒΜ τέμνονται στο Ρ. Να αποδειχτεί ότι

Α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΒΝ είναι ίσα και

Β) Το Ρ βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας ΧΟΨ

2.24 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις ΑΧ ,ΑΨ κάθετες στις ΑΒ , ΑΓ αντίστοιχα ώστε οι γωνίες ΓΑΨ, ΒΑΧ να περιέχουν την γωνία Α. Στις ΑΧ, ΑΨ παίρνουμε σημεία Δ,Ε ώστε ΑΔ=ΑΒ, ΑΕ= ΑΓ αντίστοιχα. Αν Θ,Ζ είναι τα μέσα των ΒΕ, ΓΔ να δειχτεί ότι ΕΒ=ΓΔ και ΑΖ=ΑΘ

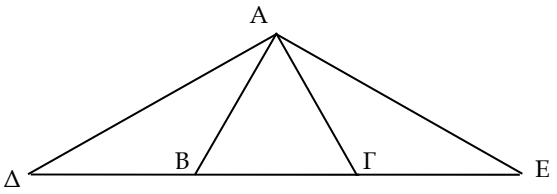
2.25 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, (ΑΒ = ΑΓ) προεκτείνουμε την ΒΓ κατά τμήματα ΒΔ=ΓΕ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ , ΑΓ , ν΄ αποδειχτεί ότι ΔΝ=ΕΜ.

2.26 Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ=ΒΕ=ΓΖ αντίστοιχα. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα σημεία τομής των ΑΕ, ΓΔ, ΒΖ ανά δύο ν΄ αποδειχτεί ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο

Μ. Παπαγρηγοράκης

ΙΣΟΤΗΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

2.27 Στο παρακάτω σχήμα ισχύει ΔΒ=ΑΒ=ΑΓ=ΓΕ.



Να αποδειχθούν:

Α) ΑΔ=ΑΕ.

Β) Τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Γ) Αν οι κάθετες από τα Δ και Ε προς τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τέμνονται στο Μ να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔΑΕ

2.28 Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, Δ το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Από το Δ φέρνουμε τη $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

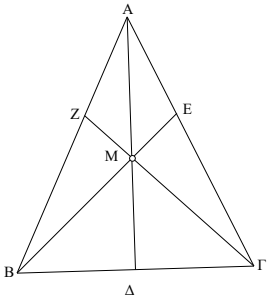
Α. $\Delta Z = \Delta E$

Β. $AZ = AE$

Γ. $B\hat{Z}\Delta = \Delta\hat{E}\Gamma$

Δ $A\Delta \perp EZ$

2.29 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, $(AB = A\Gamma)$. Αν Μ τυχαίο σημείο της διχοτόμου ΑΔ της γωνίας Α και Ε, Ζ τα σημεία τομής των ΒΜ και ΓΜ με τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, να δείξετε ότι



Α) $\Gamma Z = BE$

Β) $AZ = AE$ και $BZ = \Gamma E$

Γ) η ΑΜ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΖΕ

2.30 Στις ίσες πλευρές AB, $A\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε ώστε να είναι ΑΔ=ΑΕ. Να δειχτεί ότι τα Δ, Ε ισαπέχουν από τη ΒΓ και από τα άκρα της.

2.31 Να αποδειχτεί ότι στις ίσες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσα ύψη.

2.32 Ν΄ αποδειχτεί ότι δύο οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα όταν έχουν $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}$, $\upsilon_\gamma = \upsilon_{\gamma'}$

2.33 Ν΄ αποδειχτεί ότι δύο οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα όταν έχουν $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$, $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$

2.34 Στην ημιευθεία ΑΔ της διχοτόμου τριγώνου $AB\Gamma$ Παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ, έτσι ώστε ΑΒ=ΑΕ και ΑΓ =ΑΖ. Να αποδείξετε ότι ΒΖ=ΓΕ.

2.35 Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και από το μέσο του Μ φέρνουμε τυχαία ευθεία (ε). Αν $AK \perp (\varepsilon)$ και $B\Lambda \perp (\varepsilon)$ να αποδείξετε ότι ΑΛ=ΒΚ

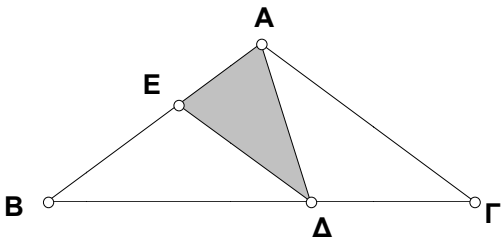
2.36 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και τα εσωτερικά σημεία του Μ , Ν της ΒΓ τέτοια ώστε ΒΜ=ΓΝ. Αν Κ , Λ οι προβολές των Β , Γ στις ΑΜ , ΑΝ αντίστοιχα να δείξετε ότι το ΑΚΛ είναι ισοσκελές

2.37 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma < B\Gamma$. Στην ημιευθεία ΒΓ θεωρούμε το σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ=ΒΑ και στην ημιευθεία ΒΑ το σημείο Ε τέτοιο ώστε ΒΕ=ΓΔ. Αποδείξτε ότι:

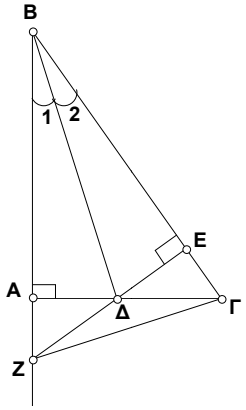
Α) Τα Τρίγωνα ΒΕΔ και ΑΔΓ είναι ίσα

Β) Το Τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Γ) $B\hat{A}\Delta - \Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}E$



2.38 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ , $\left(\hat{A} = 90^{o}\right)$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ κάθετη στη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το Τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.

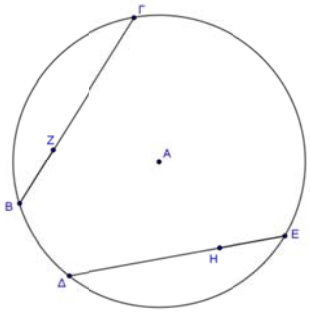


2.39 Έστω κύκλος κέντρου Α και δύο ίσες χορδές του ΒΓ και ΔΕ. Στις ΒΓ και ΔΕ παίρνουμε σημεία Ζ και Η ώστε ΒΖ=ΕΗ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

Α) ΑΖ=ΑΗ

Β) οι γωνίες ΑΖΒ και ΑΗΕ είναι ίσες

Γ) Η απόσταση του σημείου Γ από την ΑΖ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Δ από την ΑΗ

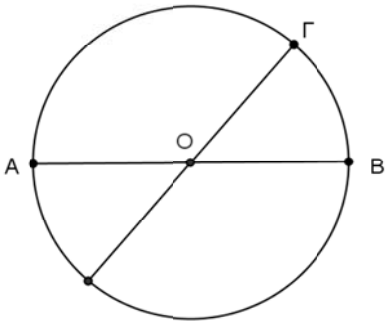


2.40 Στο σχήμα οι ΑΒ και ΓΔ είναι διάμετροι του κύκλου και Ο το κέντρο του.

Να αποδείξετε ότι:

Α) Τα σημεία Α και Β ισαπέχουν από την ΓΔ

Β) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ έχουν ίσα αποστήματα

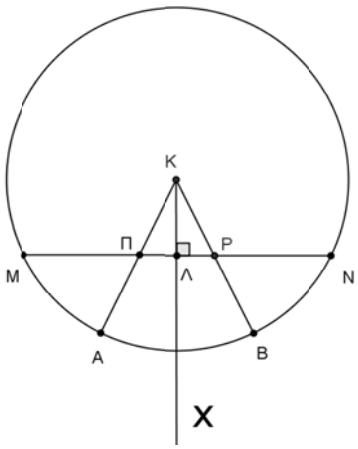


2.41 Στο σχήμα η ΚΧ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΚΒ και η ΜΝ είναι κάθετη στην ΚΧ. Το Κ είναι το κέντρο του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

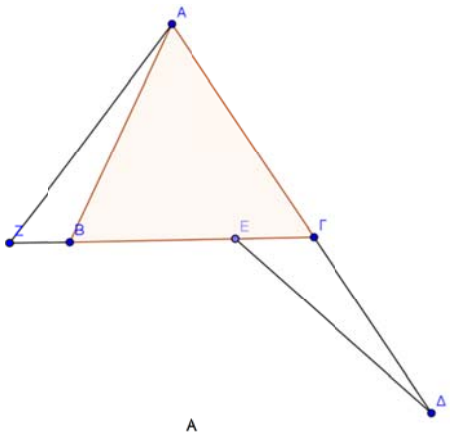
Α) ΠΑ=ΡΒ

Β) ΜΠ=ΡΝ

Γ) ΜΑ=ΝΒ



2.42 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ . Στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΔ=ΑΓ. Έστω Ε τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ και Ζ σημείο της προέκτασης της ΓΒ προς το Β ώστε ΒΖ=ΓΕ.

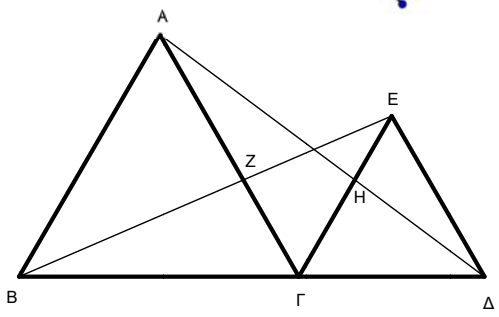


Α Να αποδειχτεί ότι ΔΕ=ΑΖ .

Β Αν η προέκταση του ΔΕ τέμνει τηνΑΖ στο Η , να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΗΖΕ είναι ισοσκελές.

Γ Αν $\hat{\Delta} = 20°$ να υπολογιστεί η γωνία $Z\hat{H}E$.

Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα ισόπλευρα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta E}$ όπου τα σημεία Β, Γ και Δ είναι συνευθειακά . Αν το τμήμα ΒΕ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ζ και το τμήμα ΑΔ τέμνει την πλευρά ΕΓ στο σημείο Η .



Α Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{\Gamma}E = 60^0$.

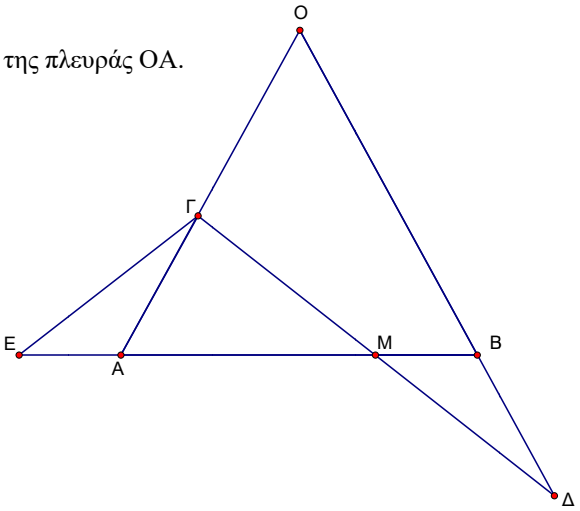
Β Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{B\Gamma E}$ και $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ είναι ίσα .

Γ Να γράψετε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ισότητα των τριγώνων $\overset{\Delta}{B\Gamma E}$ και $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$.

Δ Να αποδείξετε ότι ΒΖ = ΑΗ .

2.43 Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ (ΟΑ = ΟΒ) και Γ ένα σημείο της πλευράς ΟΑ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΟΒ κατά τμήμα ΒΔ = ΑΓ.

Το τμήμα ΓΔ τέμνει την ΑΒ στο Μ. Προεκτείνουμε και την ΒΑ κατά τμήμα ΑΕ = ΒΜ. Να αποδείξετε ότι:

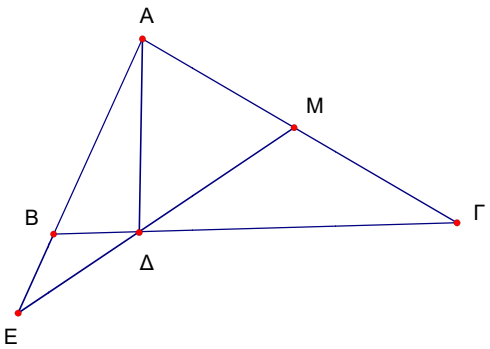


Α) ΓΕ = ΜΔ και $\Gamma\hat{E}A = B\hat{M}\Delta$

Β) Το τρίγωνο ΓΜΕ είναι ισοσκελές

Γ) ΜΓ = ΜΔ.

2.44 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ όπου $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ . Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Β και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα ΒΕ = ΒΔ . Προεκτείνουμε το τμήμα ΕΔ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

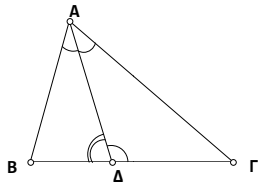


Α) $A\hat{B}\Delta = 2\, B\hat{\Delta}E$

Β) Το $\hat{M}$ είναι μέσο της ΑΓ .

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

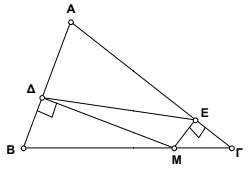
2.45 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:



Α) $A\Delta\Gamma > \frac{1}{2}A$ Β) ΑΓ>ΔΓ

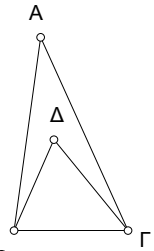
Γ) Αν επιπλέον είναι $AB < A\Gamma$ τότε $B\Delta < \Delta\Gamma$

2.46 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές του Μ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



Α) ΜΔ<ΒΜ και ΜΕ<ΜΓ Β) ΔΕ<ΒΓ Γ) ΜΔ+ΜΕ<ΑΒ+ ΑΓ

2.47 Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\Gamma < \hat{\Delta}$



2.48 Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και η διάμεσος του ΑΜ . Να αποδείξετε ότι

Α) $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$ Β) $\frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$

2.49 Σε ορθογώνειο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^0)$ Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδειχθεί ότι ΑΔ<ΔΒ.

2.50 Στις κάθετες πλευρές ΑΒ , ΑΓ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ,Ε αντίστοιχα .Να αποδείξετε ότι: Α) ΔΕ<ΕΒ Β) ΔΕ<ΒΓ.

2.51 Δίδεται τμήμα ΑΒ ,σημείο Ρ της μεσοκαθέτου του και μία ευθεία ε που διέρχεται από το Α .

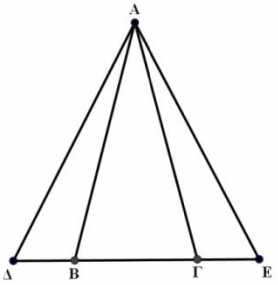
Α) Να συγκρίνετε τις αποστάσεις του Ρ από την ευθεία ε και το σημείο Β.

Β) Ποια πρέπει να είναι η θέση της ευθείας ε , ώστε οι αποστάσεις αυτές να είναι ίσες;

2.52 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$.Θεωρούμε τα σημεία Δ,Ε στις ΑΒ , ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε: ΒΔ=ΓΕ. Να δείξετε ότι: Α) ΔΕ<ΒΓ Β) ΒΕ<ΓΔ.

2.53 Έστω Μ, σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας xOy. Φέρνουμε ΜΑ κάθετη στην Ox, η οποία τέμνει την Oy στο Β. Να αποδείξετε ότι ΜΑ<ΜΒ

2.54 Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ισοσκελή



Α. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΓΕ είναι ίσα.

Β. Αν Μ είναι το μέσο της ΑΓ και Ν το μέσο της ΑΒ, να δείξετε ότι: ΔΜ = ΕΝ.

Γ. Αν τα τμήματα ΔΜ και ΕΝ τέμνονται στο σημείο Κ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΚΔΕ είναι ισοσκελές.

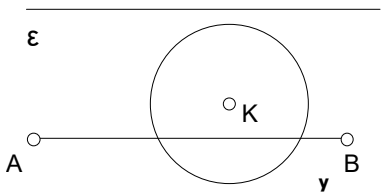
Μ. Παπαγρ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

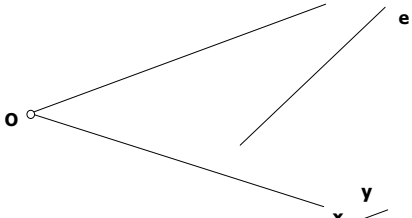
2.55 Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο που έχει την ιδιότητα που περιγράφεται σε κάθε μια από τις περιπτπωσεις:

Α)

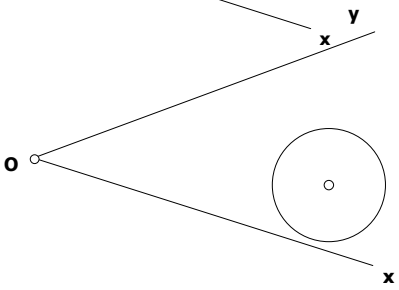
Ισαπέχει από τα σημεία Γ και Δ και βρίσκεται στην ευθεία ε

Β) 

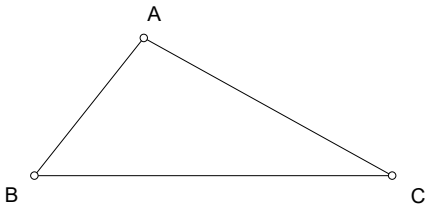
Ισαπέχει από τα σημεία Α και Β και βρίσκεται στον κύκλο κέντρου Κ

Γ) 

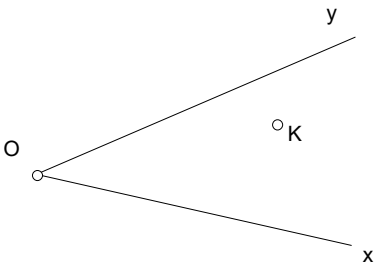
Ισαπέχει από τις τεμνόμενες ευθείες Οx και Οy και βρίσκεται στην ευθεία ε

Δ) 

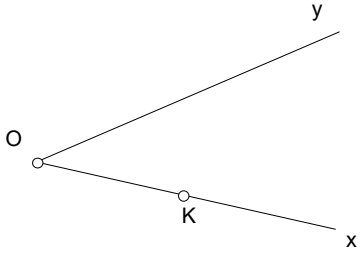
Ισαπέχει από τις τεμνόμενες ευθείες Οx και Οy και βρίσκεται στον κύκλο

Ε) 

Ισαπέχει από τις κορυφές Β και Γ και ανήκει στην ΑΓ

ΣΤ) 

Ισαπέχει από τις τεμνόμενες ευθείες Οx και Οy και απέχει από το Κ 1cm

Ζ) 

Ισαπέχει από το σημείο Κ της Οx και την ευθεία Οy και ανήκει στην ευθεία Οx

ΤΡΙΓΩΝΑ - ΚΥΚΛΟΣ

2.56 Δίνονται δύο κύκλοι Κ και Λ που εφάπτονται εξωτερικά στο Α και η κοινή εξωτερική εφαπτομένη ΒΓ. Η κοινή εφαπτομένη στο Α τέμνει την ΒΓ στο Δ. Αποδείξτε ότι:

Α) ΔΒ=ΔΓ

Β) Γωνία ΚΔΛ=90ο

Γ) Ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ εφάπτεται στην ΚΛ

2.57 Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε χορδή ΑΒ δύο σημεία Γ και Δ αυτής τέτοια ώστε ΑΓ=ΒΔ. Να αποδειχθούν:

Α) ΟΑΓ=ΟΒΔ

Β) ΟΓ=ΟΔ

Γ) Τα σημεία Γ,Δ ισαπέχουν από τις ΟΑ,ΟΒ αντίστοιχα

2.58 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΚ. Αν η $B\Theta \perp A\Kappa$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Θ να δείξετε ότι $B\hat{K}A = A\hat{K}\Theta$

2.59 Να αποδείξετε ότι αν το μέσο μιας πλευράς τριγώνου ισαπέχει από τις άλλες πλευρές του , τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

2.60 Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε τρεις χορδές $AB = \Gamma\Delta = EZ$ και τα σημεία τους K,Λ,M έτσι ώστε $AK = \Gamma\Lambda = EM$. Δείξτε ότι τα K,Λ,M ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το O.

2.61 Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες R και r με R>r αντίστοιχα. Μια ευθεία τέμνει και τους δύο κύκλους στα σημεία Α,Δ τον ένα και στα Β, Γ τον άλλο. Να αποδείξετε ότι ΑΒ=ΓΔ

2.62 Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες R και r με R>r αντίστοιχα. Φέρουμε δύο χορδές του μεγαλύτερου κύκλου, οι οποίες εφάπτονται στον μικρότερο. Να αποδείξετε ότι οι χορδές είναι ίσες

2.63 Θεωρούμε τους ίσους κύκλους (Ο,ρ) και (Ο΄,ρ) και ευθεία ε που διέρχεται από το μέσο Μ του ΟΟ΄ και τέμνει τους κύκλους (Ο,ρ) και (Ο΄,ρ) στα σημεία Α,Β και Γ,Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΓΔ

2.64 Αν δύο ίσες χορδές AB , $\Gamma\Delta$ τέμνονται εκτός κύκλου στο Κ, να αποδείξετε ότι ΚΒ=ΚΔ και ΚΑ=ΚΓ

2.65 Αν δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου (Ο,ρ) τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο Ε και είναι $O\hat{E}A = O\hat{E}\Gamma$, να αποδείξετε ότι ΑΒ=ΓΔ

2.66 Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και σημεία Α,Β εσωτερικά του έτσι ώστε ΟΒ=2ΟΑ. Οι ΟΒ, ΟΑ τέμνουν τον κύκλο στα Λ, Κ αντίστοιχα. Αν Ν μέσο του τόξου ΚΛ και Μ μέσο του ΟΒ να αποδείξετε ότι $ON \perp AM$

2.67 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ προς το μέρος του Β παίρνοντας τμήμα ΒΔ=ΑΒ και προς το μέρος του Γ παίρνοντας τμήμα ΓΕ=ΑΓ. Στη συνέχεια φέρνουμε τις διχοτόμους ΒΚ (Κ σημείο της ΑΔ) και ΓΛ (Λ σημείο της ΑΕ) των εξωτερικών γωνιών ΑΒΔ και ΑΓΕ αντίστοιχα του τριγώνου, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ.

Α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές

Β) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (Α,ΑΒ) και (Β,ΒΔ) τέμνονται

Μ. Παπαγρηγοράκης

3 ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

3.01 Στα σημεία Α και Β ευθείας ε φέρνουμε τις Αx , By παράλληλες μεταξύ τους και προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ε. Αν Μ τυχαίο σημείο «μεταξύ « των Αx, By να αποδειχτεί ότι η γωνία ΑΜΒ ισούται με το άθροισμα των γωνιών xΑΜ και yΒΜ.

3.02 Από τα άκρα ευθ. Τμήματος ΑΒ φέρνουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο τις παράλληλες Αx και By. Στο ΑΒ παίρνουμε σημείο Γ , στην Αχ τμήμα ΑΔ= ΑΓ και στην ΒΨ τμήμα ΒΕ=ΓΒ. Ν΄ αποδειχτεί ότι η γωνία ΔΓΕ είναι ορθή.

3.03 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διαμέσους ΒΜ και ΓΝ. Προεκτείνουμε τη ΒΜ κατά τμήμα ΜΔ, ώστε ΒΜ=ΜΔ και τη ΓΝ κατά τμήμα ΝΕ ώστε ΓΝ=ΝΕ. Να αποδείξετε ότι :

Α) ΑΔ//ΒΓ Β) ΕΑ//ΒΓ

Γ) Τα σημεία Ε, Α και Δ είναι συνευθειακά.

3.04 Να αποδείξετε ότι αν η διχοτόμος εξωτερικής γωνίας τριγώνου είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και αντίστροφα.

3.05 Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε την ευθεία ε παράλληλη στην ΒΓ που τέμνει τις διχοτόμους των γωνιών Β,Γ στα σημεία Δ και Ε. Ν΄ αποδειχτεί ότι ΔΕ=ΑΒ+ΑΓ.

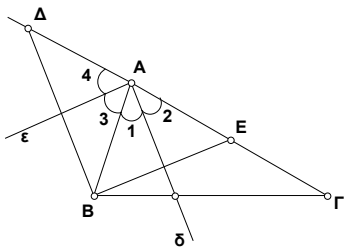
3.06 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από σημείο Ε της ευθείας ΒΓ, διαφορετικό από το Δ φέρνουμε την παράλληλη προς την ΑΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ζ και την ΑΓ στο Η. Ν αποδειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

3.07 Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις διάμεσους ΒΒ΄ και ΓΓ΄ και μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ. Να δειχτεί ότι τα τμήματα της ευθείας ε που βρίσκονται μεταξύ των ίσων πλευρών και των αντίστοιχων διαμέσων είναι ίσα.

3.08 Έστω Ο το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών Β και Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ . Από το Ο φέρνουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. να δειχτεί ότι ΔΕ=ΒΔ+ΓΕ.

3.09 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ , $(AB = B\Gamma)$, η διάμεσος ΑΜ και ένα σημείο Η της διαμέσου. Στο Η φέρνουμε κάθετη προς την ΑΜ που τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

3.10 Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ φέρνουμε την εσωτερική διχοτόμο Αδ και τη διχοτόμο Αε της εξωτερικής γωνίας Α. Από το Β φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς τις Αδ και Αε αντίστοιχα οι οποίες τέμνουν την ευθεία ΑΓ στα σημεία Δ και Ε. Να δείξετε ότι:

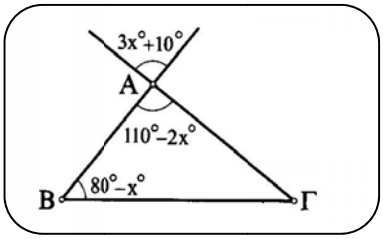


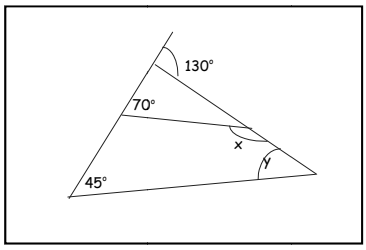
Α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΕ είναι ισοσκελή

Β) ΑΔ=ΑΒ=ΑΕ Γ) $A\varepsilon \perp B\Delta$, $A\delta \perp BE$ και $A\varepsilon \perp A\delta$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

3.11 Στο διπλανό σχήμα να υπολογιστούν οι γωνίες Α, Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ .





3.12 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες x και y

3.13 Να υπολογιστούν οι γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου του οποίου μια γωνία είναι ίση με τα 2/3 μιας άλλης γωνίας του.

3.14 Να υπολογιστούν τα μέτρα των γωνιών ενός τριγώνου αν οι εξωτερικές του γωνίες είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 2, 3 και 4

3.15 Να δείξετε ότι ένα κυρτό ν-γωνο δεν μπορεί να έχει περισότερες από 3 εσωτερικές οξείες γωνίες.

3.16 Α) Πόσες πλευρές έχει ένα κυρτό πολύγωνο του οποίου το άθροισμα των γωνιών είναι 1080°;

Β) Υπάρχει κυρτό πολύγωνο που έχει άθροισμα των γωνιών 13 ορθές;

3.17 Η γωνία Α ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι $78°$. Στις προεκτάσεις της βάσης του παίρνουμε τμήματα ΒΔ=ΑΒ και ΓΕ=ΓΑ αντίστοιχα . Να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

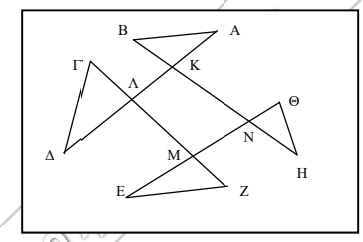
3.18 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία που σχηματίζεται

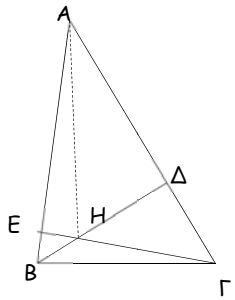
Α) από τις διχοτόμους των γωνιών Β και Γ είναι ίση με $90° + \frac{A}{2}$

Β) από τις διχοτόμους των εξωτερικών γωνιών Β και Γ ισούται με $90° - \frac{A}{2}$

Γ) απο τις διχοτόμους της γωνίας Β και της εξωτερικής γωνίας Γ ιστούται με $\frac{A}{2}$

3.19 Στο σχήμα να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών Α+Β+Γ +Δ +Ε+Ζ+Η+Θ

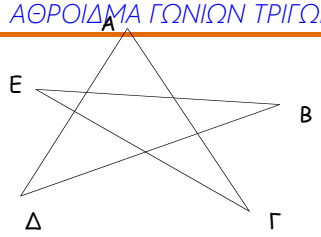




3.20 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 45^{\circ}$.Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο Η να αποδείξετε ότι ΑΗ=ΒΓ

Μ. Παπαγρ...

3.21 Να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών Α+Β+Γ+Δ+Ε του διπλανού σχήματος

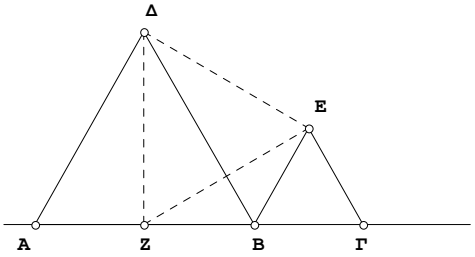


3.22 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma > AB$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και τη διχοτόμο AE της γωνίας Να αποδείξετε ότι :

Α) $\Delta\hat{A}E = \dfrac{180 + \hat{\Gamma} - \hat{B}}{2}$ Β) $\Delta\hat{A}E = \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

3.23 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και τη διχοτόμο του $A\Delta$. Σ την ημιευθεία AB παίρνουμε τμήμα $A\Gamma' = A\Gamma$ και στην πλευρά $A\Gamma$ τμήμα $AB' = AB$. Να αποδειχτεί ότι τα σημεία B', Δ, Γ' είναι συνευθειακά.

3.24 Σε ευθεία θεωρούμε τα σημεία Α,Β και Γ έτσι ώστε ΑΒ=2ΒΓ και στο ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Αν Ζ είναι το μέζο του AB, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισόπλευρο.

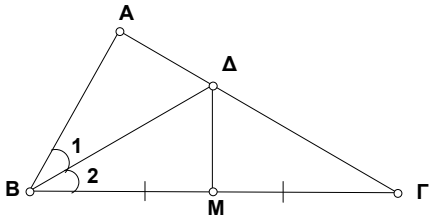


3.25 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο $B\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας Β που τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να δείξετε ότι:

Α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

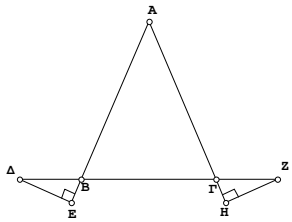
Β) Η γωνία Α είναι ορθή.

Γ) ΑΔ<ΔΓ

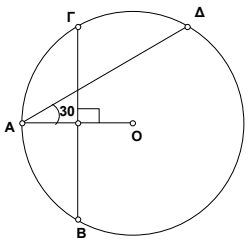


3.26 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, $(AB = A\Gamma)$ και τα σημεία Δ και Β βρίσκονται στην προέκταση της ΒΓ έτσι ώστε ΒΔ=ΓΖ. Αν $\Delta E \perp AB$ και $ZH \perp A\Gamma$ να αποδείξετε ότι:

Α) $\Delta E = ZH$ και Β) $\Gamma H + AB < A\Delta$.



3.27 Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε μια ακτίνα ΟΑ, μια χορδή ΒΓ που είναι μεσοκάθετος της ακτίνας αυτής, και μια ακόμη χορδή ΑΔ που σχηματίζει με την ΟΑ γωνία 30ο . Δείξτε ότι ΑΔ=ΒΓ.



3.28 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο είναι $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90°$. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας Α σχηματίζει με την ΒΓ μια γωνία $45°$.

3.29 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και εξωτερικά της AB κατασκευάζουμε ΑΔΒ ισόπλευρο. Αν η διχοτόμος ΑΝ είναι κάθετη και ίση με την ΑΔ να βρεθούν οι γωνίες του $AB\Gamma$

3.30 Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α}=90^{\circ})$. Από τυχαίο σημείο Μ του ΒΓ υψώνω κάθετη στη ΒΓ που τέμνει την ΒΑ στο Δ. Αν η διχοτός της $\hat{Γ}$ τέμνει τις ΜΔ, ΑΒ στα Κ, Λ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι ΚΛΔ ισοσκελές τρίγωνο

3.31 Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α}=90)$ και είναι $\hat{Γ}=2\hat{Β}$. Στο μέσο της υποτείνουσας ΒΓ φέρνουμε μία ευθεία κάθετη στην ΒΓ που τέμνει την $ΑΒ$ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΔΒΚ είναι ίσα

3.32 Από το μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ ορθογώνιου τρίγωνου $ΑΒΓ$ $(\hat{Α}=90)$ και ΑΒ>ΑΓ φέρνουμε κάθετη προς την ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο Δ. Αν τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΑΓ είναι ίσα, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$

3.33 Να αποδείξετε ότι:

Α) Οι διχοτόμοι δύο γωνιών που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι παράλληλες ή κάθετες.

Β) Οι διχοτόμοι δύο γωνιών που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι παράλληλες ή κάθετες.

3.34 Να αποδείξετε ότι όταν δύο απέναντι γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ορθές τότε οι διχοτόμοι των δύο άλλων γωνιών του είναι παράλληλες.

3.35 Σε τετράπλευρο να αποδείξετε ότι

Α) η γωνία που σχηματίζεται από τις διχοτόμους δύο διαδοχικών γωνών του, είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο άλλων γωνιών του.

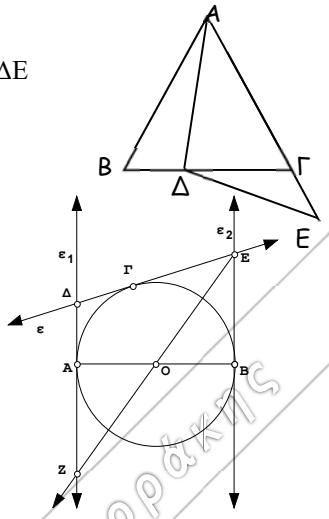
Β) οι διχοτόμοι των γωνιών του, σχηματίζουν τετράπλευρο του οποίου οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Γ) οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών του, σχηματίζουν τετράπλευρο του οποίου οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Δ) η γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών του είναι ίση με την ημιδιαφορά των δύο άλλων γωνιών του.

Ε) η γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι δύο διαδοχικών εξωτερικών γωνιών τετραπλεύρου είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο αυτών (εσωτερικών) γωνιών

3.36 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Στην προέκταση της $ΑΓ$, προς το Γ, παίρνουμε τμήμα ΓΕ=ΒΔ. Να αποδείξετε ότι ΔΑ=ΔΕ



3.37 Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Ο,R) και μια διάμετρός του ΑΒ. Οι ευθείες $ε_1, ε_2$ είναι οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β και η ε είναι εφαπτομένη σε σημείο Γ που τέμνει την $ε_1$ στο Δ και την $ε_2$ στο Ε. Η ΕΟ είναι η διακεντρική ευθεία του σημείου Ε που τέμνει την $ε_1$ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

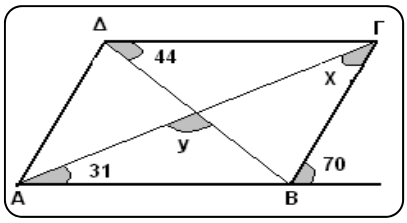
Α) το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές.

Β) $ΔΟ \perp ΖΕ$

Μ. Παπαγρηγοράκης

4 ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

4.01 Στο Παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τις γωνίες x και y.



4.02 Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ε το μέσο της ΑΔ. Στο Ε φέρουμε μια ευθεία κάθετη στη ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο Ζ, και την ευθεία ΒΑ στο Ν. Να αποδείξετε ότι :

Α) ΕΝ = ΕΖ

Β) ΒΖ = ΔΖ + ΔΓ

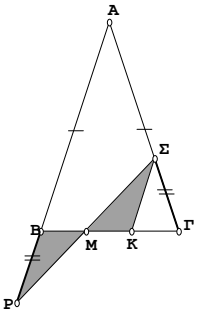
4.03 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και φέρνουμε ΓΔ το ύψος. Έστω Μ μέσο του ΓΔ και η κάθετη Από το Γ στη ΔΓ τέμνει την ΑΜ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΔΕ=ΑΓ

4.04 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, $(AB = A\Gamma)$ και Σ τυχαίο σημείο της ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Β κατά τμήμα ΒΡ=ΣΓ. Αν ΣΚ//ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

Α) τρίγωνο **ΣΚΓ** είναι ισοσκελές.

Β) Τα τρίγωνα **ΒΡΜ** και **ΜΚΣ** είναι ίσα

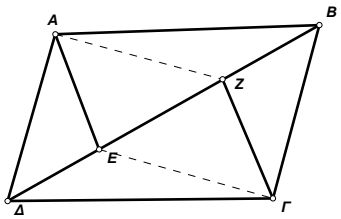
Γ) Η **ΒΓ** διχοτομεί την **ΡΣ**.



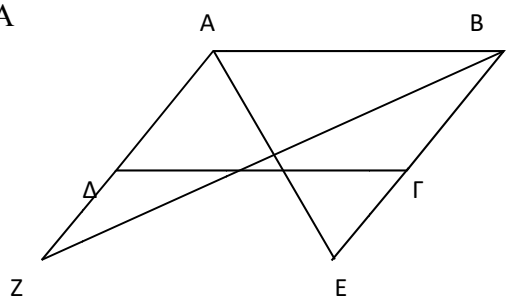
4.05 Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και στις προεκτάσεις των διαμέσων του ΑΜ, ΒΝ τα σημεία Δ, Ε τέτοια ώστε ΜΔ=ΜΑ και ΝΕ=ΝΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΓΔ=ΓΕ και ότι τα σημεία Γ, Δ και Ε είναι συνευθειακά.

4.06 Δίνετε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και σημείο Μ στην προέκταση της βάσης ΒΓ προς το μέρος του Β. Από το Μ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν τις ημιευθείες ΓΑ, ΑΒ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $M\Delta - ME = AB$.

4.07 Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ από τις κορυφές Α και Γ φέρνουμε $AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$. Να αποδείξετε ότι το ΑΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.



4.08 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την ΒΓ στο Ε και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ΑΔ στο Ζ



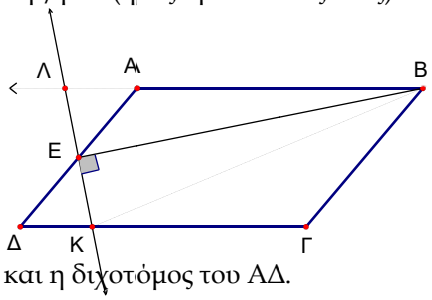
Να αποδείξεται ότι :

Α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΖΒ είναι ισοσκελή

Β) Τα τμήματα ΑΕ και ΒΖ τέμνονται κάθετα

Γ) Τα τετράπλευρα ΑΒΕΖ και ΔΓΖΕ είναι παραλληλόγραμμα.

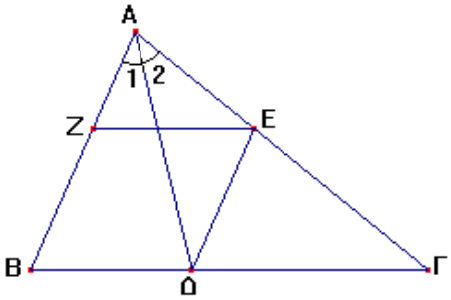
4.09 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ε το μέσο της πλευράς ΑΔ. Φέρνουμε την ΕΒ και στη συνέχεια την κάθετη στην ΕΒ στο Ε που τέμνει τις πλευρές ΓΔ και ΑΒ του παρ/μου (ή τις προεκτάσεις τους) στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



Α) ΑΛ = ΔΚ και ΛΕ = ΕΚ

Β) Το τρίγωνο ΚΒΛ είναι ισοσκελές

Γ) Η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΚΒ.



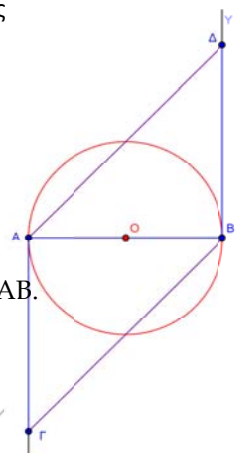
4.10 Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε και από το Ε φέρνουμε παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.

Α) Να δικαιολογήσετε οτι το τετράπλευρο ΒΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές

Γ) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΕ και ΒΖ είναι ίσα

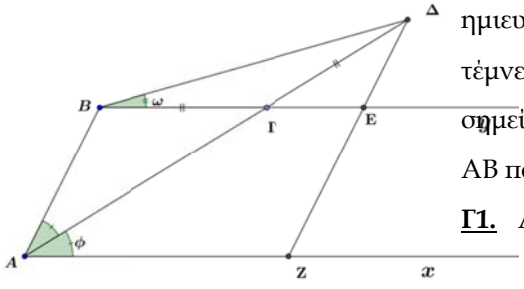
Δ) Αν επιπλέον η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με 86^0 ,
να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΔ.



4.11 Δίνεται κύκλος με διάμετρο ΑΒ. Στα σημεία Α και Β φέρνουμε τις εφαπτόμενες Αx και By , όχι προς το ίδιο μέρος της ΑΒ και παίρνουμε πάνω σε αυτές τμήματα ΑΓ=ΒΔ=ΑΒ.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ΑΓΒΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Γ2. Να βρεθούν οι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΓΒΔ.



4.12 Απ' τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρνουμε τις ημιευθείες Αx και By έτσι ώστε ***Ax//By.*** Αν η ***διχοτόμος*** της $B\hat{A}x$ τέμνει την By στο Γ , στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ πάρουμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε ***ΓΒ=ΓΔ*** και από το Δ φέρουμε ***παράλληλη*** στην ΑΒ που τέμνει την By στο Ε και την Αx στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

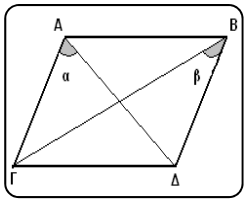
Γ1. ΑΒ=ΒΓ **Γ2.** φ=2ω **Γ3.** ΖΔ=ΒΕ

Μ. Γιαπαγιάννου

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ – ΡΟΜΒΟΣ

4.13 Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και το συμμετρικο Ε του Α ως προς την ΒΔ. Η ευθεία ΒΕ τέμνει την ΓΔ στο Μ. Αν Ν είναι η προβολή του Μ στην ΒΔ, να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α,Ν,Γ είναι συνευθεικά

4.14 Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος. Αν $\hat{\alpha} = 3x - 2$ και $\hat{\beta} = 2x + 7$, τότε να υπολογίσετε το x



4.15 Σε κύκλο (Ο , ρ) φέρνουμε χορδή ΑΒ = ρ και παίρνουμε τυχαίο σημείο Μ του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{AB}$.Αν Γ , Δ , Ε , Ζ είναι τα μέσα των ΟΑ , ΟΒ , ΜΒ , ΜΑ , αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι :

Α. Η γωνία $A\hat{O}B = 60^0$

Β. Το τετράπλευρο ΓΔΕΖ είναι ρόμβος.

4.16 Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ και $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta$.

Α) Αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές .

Β) Να δείξετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα .

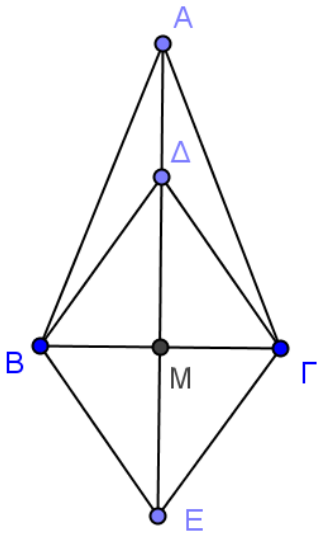
Γ) Αν προεκτείνουμε την ΑΔ να αποδείξετε ότι διέρχεται από το μέσο της ΒΓ .

Δ) Αν ΔΜ = ΜΕ , αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΓΕ είναι ρόμβος .

4.17 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ, Κ, Λ τα μέσα των ΒΓ, ΑΔ, ΑΓ, Β

Α. Δείξτε ότι το τετράπλευρο ΚΕΛΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Β Αν επιπλέον ΑΒ = ΓΔ , να δείξετε ότι το ΚΕΛΖ είναι ρόμβος.



ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

4.18 Πάνω στη διαγώνιο ΒΔ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε τμήμα ΒΕ = ΒΓ. Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{\Gamma}E$.

4.19 Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΒ τετραγώνου ΑΒΓΔ κατά ΑΕ και ΒΖ αντίστοιχα ώστε ΑΕ=ΒΖ. Να αποδείξετε ότι :

Α) $AZ = \Delta E$ Β) $AZ \perp \Delta E$

4.20 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Β και έστω ΒΜ η διάμεσος του. Σχηματίζουμε δύο τετράγωνα εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΗΚ και ΒΓΡΘ, να δείξετε ότι $(H\Theta) = 2(BM)$

4.21 Θεωρούμε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ, το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εντός του τετραγώνου και το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΖ εκτός του τετραγώνου. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

4.22 Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΓΔ. Η διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}B$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ. Από το σημείο Δ φέρουμε $\Delta H \perp AZ$ (Η σημείο της ΑΖ) που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Θ και την ΑΕ στο σημείο Ι. Να αποδείξετε ότι:

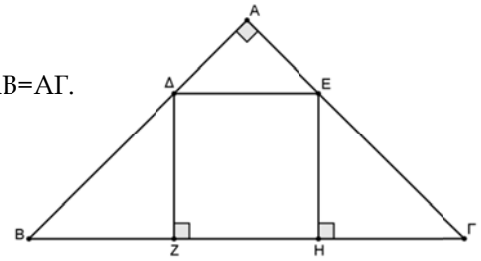
Α Το τρίγωνο ΑΙΘ είναι ισοσκελές

Β ΔΕ=ΙΕ

Γ Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΔΘ είναι ίσα

Δ ΑΕ=ΔΕ+ΒΖ

4.23 Θεωρούμε ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και ΑΒ=ΑΓ. Στις ίσες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα,



έτσι ώστε $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$

Αν τα Ζ και Η είναι τα ίχνη των κάθετων τμημάτων από τα Δ και Ε στην ΒΓ, τότε:

Α Να αποδείξετε ότι το ΔΕΗΖ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Β Να αποδείξετε ότι το ΔΕΗΖ είναι τετράγωνο.

Γ Να αποδείξετε ότι $BZ = ZH = H\Gamma$.

4.24 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ προς το μέρος του Δ κατά τμήμα ΔΕ=ΒΔ. Έστω Ζ το μέσο της ΑΔ και Η το σημείο τομής των ευθειών ΑΕ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

Α $\Delta H = \frac{1}{2}A\Delta$

Β ΓΖ=ΑΗ.

Γ ΓΖ κάθετη στην ΑΕ.

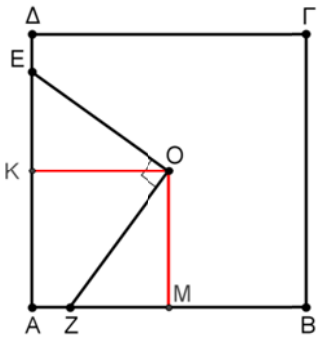
Μ. Παπαγρηγοράκης

4.25 Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα ΑΒΕ εσωτερικά και ΒΓΖ εξωτερικά.

Α Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ

Β Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές,

Γ Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\Delta EZ}$



4.26 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Έστω τυχαίο σημείο Ζ πάνω στην ΑΒ και σημείο Ε πάνω στην ΑΔ τέτοιο ώστε $\hat{ZOE} = 90^o$. Έστω Κ και Μ τα μέσα των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα

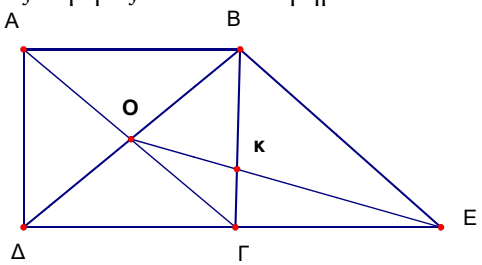
Α) α αποδείξεις ότι τρίγωνο ΟΖΜ = τρίγωνο ΟΕΚ

Β) Να αποδείξεις ότι το τρίγωνο ΕΟΖ είναι ισοσκελές και να υπολογίσεις τις γωνίες του

Γ) Να αποδείξεις ότι ΑΖ = ΔΕ

Δ) Να προεκτείνεις τις ΕΟ και ΖΟ προς το Ο οι οποίες τέμνουν την ΒΓ στο Ν και την ΓΔ στο Λ αντίστοιχα .Να αποδείξεις ότι το ΕΖΝΛ είναι επίσης τετράγωνο

4.27 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ . Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ . Να αποδείξετε ότι:



Α) Η γωνία ΒΕΓ είναι 45°

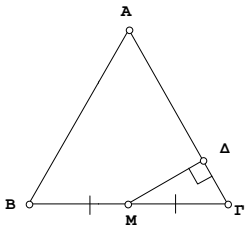
Β) Το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές .

Γ) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

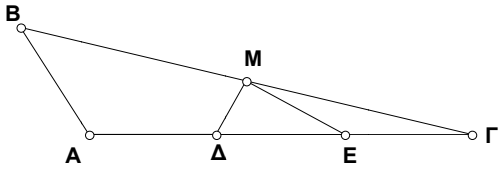
Δ) Αν Ο το κέντρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ και η ΕΟ τέμνει τη ΒΓ στο Κ , να δείξετε ότι το Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΕ .

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛ/ΜΩΝ –ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

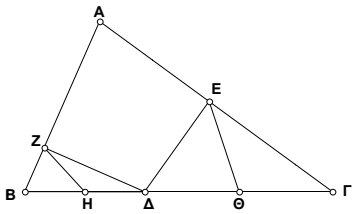
4.28 Σε ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ από το μέσον Μ της $ΒΓ$ φέρνουμε $ΜΔ \perp ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = 3 \cdot ΓΔ$.



4.29 Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΓ=3ΑΒ$. Τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται στην πλευρά $ΑΓ$ έτσι, ώστε $ΑΔ=ΔΕ=ΕΓ$. Αν Μ είναι το μέσο του $ΒΓ$, να αποδείξετε ότι γωνία $ΔΜΕ$ είναι ορθή.



4.30 Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και Δ τυχαίο σημείο της $ΒΓ$. Φέρουμε $ΔΖ \perp ΑΒ$ και $ΔΕ \perp ΑΓ$. Αν Η και Θ τα μέσα των $ΒΔ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα δείξτε ότι: $2(ΖΗ + ΕΘ) = ΒΓ$

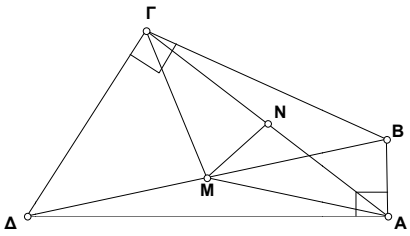


4.31 Σε τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι $\hat{Α} = \hat{Γ} = 90^{ο}$. Αν Μ είναι το μέσο της $ΒΔ$ και Ν το μέσο της $ΑΓ$ να αποδείξετε ότι:

Α) Το τρίγωνο $ΜΑΓ$ είναι ισοσκελές.

Β) $ΑΓ \le ΒΔ$

Γ) $ΜΝ \perp ΑΓ$



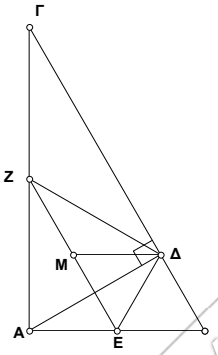
4.32 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με υποτείνουσα $ΒΓ$ θεωρούμε το ύψος $ΑΔ$ και τα μέσα Ε και Ζ των $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το $ΖΔΕ$:

Α) Είναι ορθογώνιο.

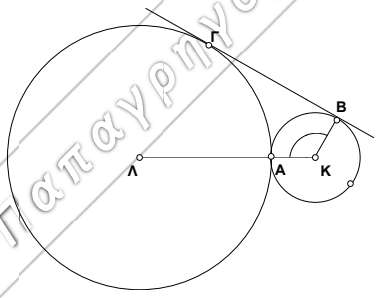
Β) Έχει περίμετρο την ημιπερίμετρο του $ΑΒΓ$.

Γ) Έχει διάμεσο $ΔΜ$ ίση με $\frac{1}{4}ΒΓ$

Δ) Αν επι πλέον $Γ=30ο$ να αποδείξετε ότι $ΔΕ = \frac{1}{4}ΒΓ$



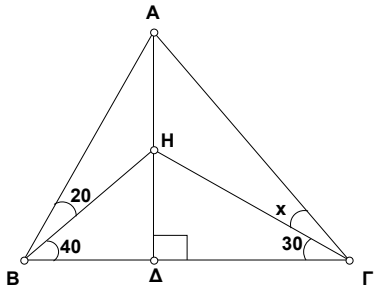
4.33 Δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,3R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Αν $ΒΓ$ είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους να αποδείξετε ότι η γωνία $ΒΚΛ$ είναι $120ο$.



Μ. Παπαγρηγοράκης

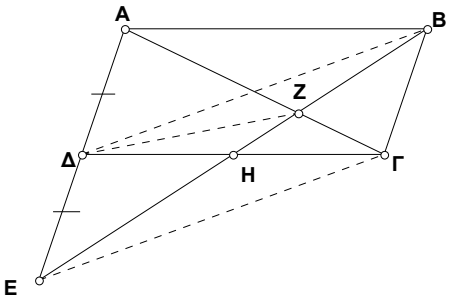
4.34 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε $A\Delta \perp B\Gamma$ και σημείο Η στην ΑΔ ώστε η γωνία $ABH = 20^0$, γωνία $H\Gamma B = 40^0$ και γωνία $H\Gamma B = 30^0$

Α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma H \perp AB$.
Β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΓΗ.

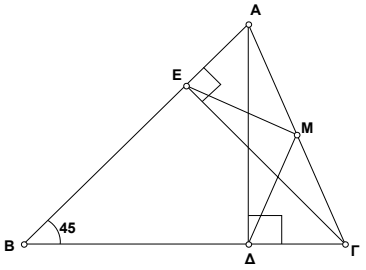


4.35 Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ. Αν η ΒΕ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ και τη ΔΓ στο σημείο Η, να αποδείξετε ότι:

Α) Το τ ΒΔΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.
Β) ΔΗ=ΗΓ
γ) Η ΔΖ Περνάει από το μέσο της ΒΓ.

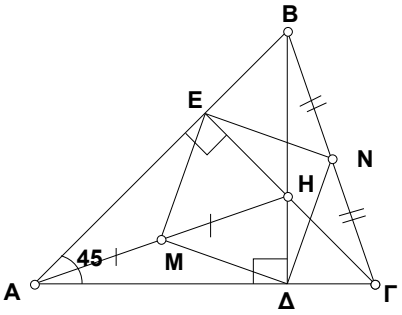


4.36 Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι 45ο. Αν ΑΔ και ΓΕ τα δύο ύψη του τριγώνου και Μ το μέσο της ΑΓ να αποδείξετε ότι $ME = \perp M\Delta$

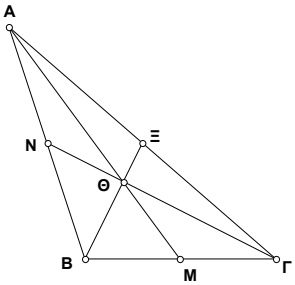


4.37 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α=45ο, τα ύψη ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η, το μέσο Μ του ΑΗ και το μέσο Ν του ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

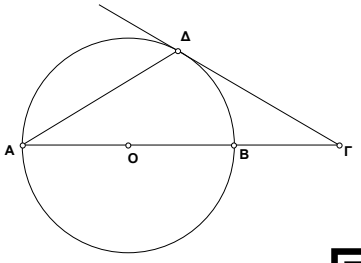
Α) ΕΝ=ΔΝ
Β) ΕΜ=ΜΔ
Γ) Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΔΓ είναι ίσα.
Δ) Το τετράπλευρο ΔΜΕΝ είναι τετράγωνο



4.38 Έστω Θ το βαρύκεντρο τριγώνου ΑΒΓ. Αν ΑΘ=ΒΓ, να αποδείξετε ότι $B\Theta \perp \Gamma\Theta$.



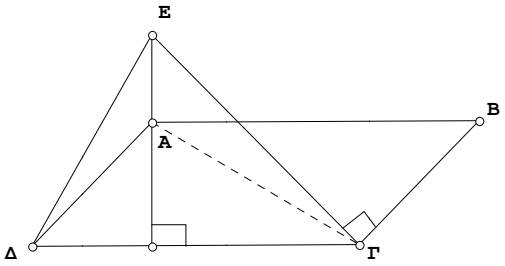
4.39 Σε κύκλο (O,R) προεκτείνουμε τη διάμετρο ΑΒ κατά τμήμα ΒΓ=R και φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές



4.40 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Η κάθετη προς τη ΒΓ στο Γ και η κάθετη από το Α προς την ΑΒ τέμνονται στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

Α) ΔΑ ⊥ ΕΓ.

Β) ΓΑ ⊥ ΔΕ.

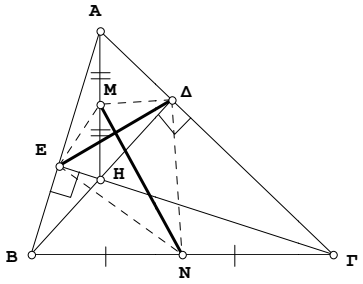


4.41 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ , τα ύψη ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η, το μέσο Μ του ΗΑ και το μέσο Ν της πλευράς ΒΓ.Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΝ=ΔΝ

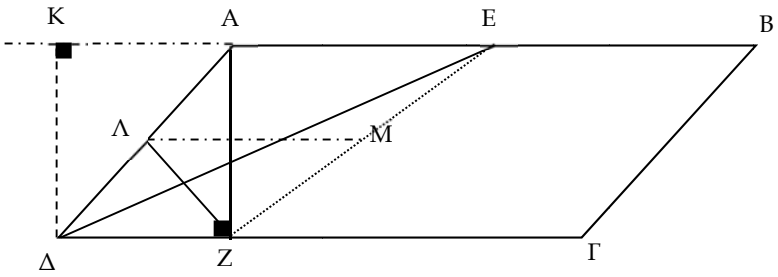
β) ΕΜ=ΔΜ

γ) ΜΝ ⊥ ΔΕ



4.42 Έστω παρ/μο **ΑΒΓΔ** με $\hat{A} = 120^o$.

Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$ τέμνει την **ΑΒ** στο μέσο της **Ε**.



Α) Δείξτε ότι: $A\Delta = \frac{AB}{2}$

Β) Δείξτε ότι: $K\Delta = \frac{\Delta E}{2}$

Γ) Αν **Λ** , **Μ** είναι τα μέσα των τμημάτων **ΑΔ** και **ΖΕ** αντίστοιχα δείξτε ότι: $\Lambda M = \frac{A\Delta + Z\Lambda}{2}$

4.43 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ . Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ.

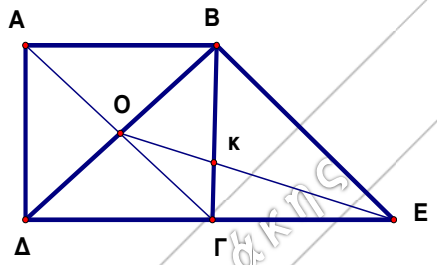
Να αποδείξετε ότι:

Α) Η γωνία ΒΕΓ είναι 45^0**.**

Β) Το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές .

Γ) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Δ) Αν Ο το κέντρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ και η ΕΟ τέμνει την ΒΓ στο Κ , να δείξετε ότι το Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΕ.



4.44 Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει Γ=45° και Β=15° . Στην προέκταση της πλευράς ΓΑ προς το Α παίρνουμε τμήμα ΑΔ=2ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΑΔΒ=75° .

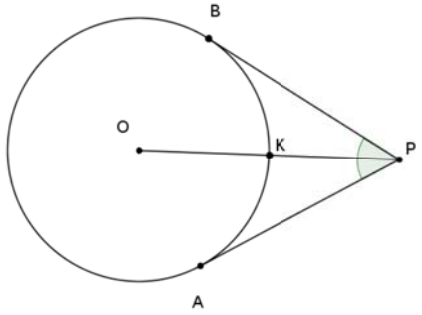
Από ένα εξωτερικό σημείο Ρ , κύκλου (Ο, R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ, ΡΒ, ‘οπου ΑΡΒ=60^0. Προεκτείνουμε το ΟΒ (προς το μέρος του Β) κατά τμήμα ΒΜ=ΟΒ.

Αν η ευθεία ΟΡ τέμνει τον κύκλο στο Κ, να αποδείξετε ότι:

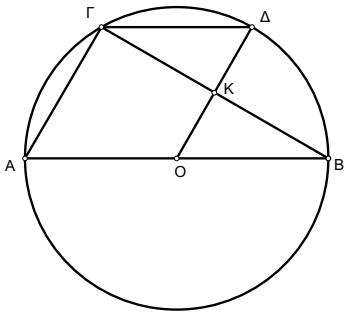
Α) γωνία ΒΡΜ=30^0

Β) ΡΜ=2R

Γ) Το τετράπλευρο ΟΑΚΒ είναι ρόμβος



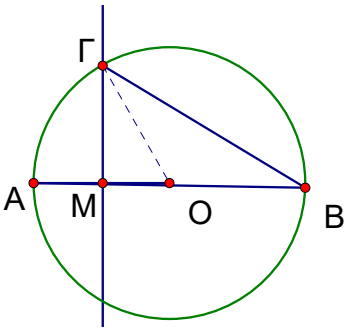
4.45 Δίνεται κύκλος (O,R), μια διάμετρος ΑΒ και χορδή ΑΓ=R. Φέρνουμε ΟΚ κάθετη στη ΒΓ που η προέκταση της τέμνει τον κύκλο στο Δ.



Α. Να δείξετε ότι ΑΓ = 2.ΟΚ

Β. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΟΔΓ είναι ρόμβος.

4.46 Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και μία διάμετρος του ΑΒ. Φέρουμε τη μεσοκάθετο του ΟΑ που τέμνει την ΟΑ στο Μ και τον κύκλο στο Γ. Να αποδείξετε ότι:

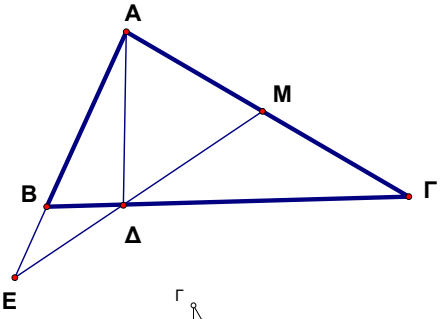


Α) Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο

Β) Η ΟΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΓΒ

Γ) ΓΒ = 2ΓΜ.

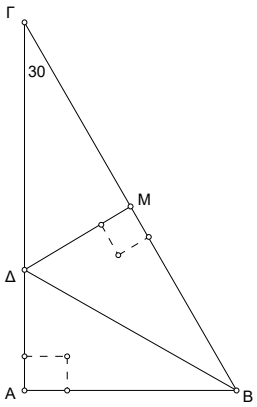
4.47 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ όπου Β = 2Γ. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Β και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα ΒΕ = ΒΔ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΕΔ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Μ. Να αποδείξετε ότι :



Α) ΑΒΔ = 2 ΒΔΕ

Β) Το Μ είναι μέσο της ΑΓ.

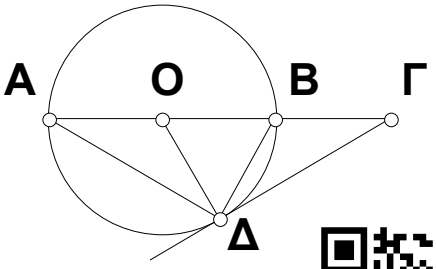
4.48 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με (Α=90°) με Γ=30°.Αν η μεσοκάθετη της ΒΓ στο μέσο της Μ , τέμνει την ΑΓ στο Δ , να αποδείξετε ότι



Α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΒΓ

Β) $ΑΔ=\frac{ΑΓ}{3}$

4.49 Δίνεται κύκλος (O,R) και η διάμετρός του ΑΒ. Προεκτείνουμε την διάμετρο ΑΒ προς το μέρος του Β κατά τμήμα ΒΓ = R. Από το Γ φέρνουμε την εφαπτομένη ΓΔ του κύκλου . Να αποδεί-ξετε ότι:



Α. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΟΔΓ είναι ορθογώνια.

Β. Το τρίγωνο ΟΔΒ είναι ισόπλευρο.

Γ. Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΒΓΔ είναι ίσα.

4.50 Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα ΑΒΕ εσωτερικά και ΒΓΖ εξωτερικά.

Α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ

Β. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές,

Γ. Να υπολογίσετε την γωνία $\Delta\hat{E}Z$

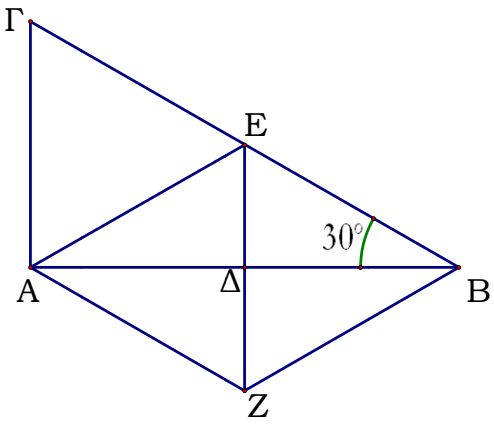
4.51 Στο παρακάτω σχήμα είναι:

ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 1\angle$ και $\hat{B} = 30^o$,

τα Δ και Ε είναι τα μέσα των ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα,

ΔΖ = ΕΔ.

Να αποδείξετε ότι :



Α. ΑΕ =ΕΖ = $\frac{\text{ΒΓ}}{2}$ Μονάδες 9

Β. ΕΖ // ΑΓ Μονάδες 9

Γ. ΑΕΒΖ είναι ρόμβος Μονάδες 7

4.52 Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

Α) Τα τετράπλευρα ΕΚΗΛ και ΖΚΘΛ είναι παραλληλόγραμμα.

Β) Οι ευθείες ΕΗ, ΖΘ και ΚΛ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

4.53 Δείξτε ότι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου σχηματίζουν ρόμβο, ενώ τα μέσα πλευρών τετραγώνου σχηματίζουν τετράγωνο.

4.54 Α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος AM και το ευθύγραμμο τμήμα ΔE που ενώνει τα μέσα των πλευρών AB, $A\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ διχοτομούνται.

Β) Θεωρούμε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Αν E, Z τα μέσα των AB, $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα και K, Λ, M, N τα μέσα των AZ, ΓE, BZ και ΔE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

4.55 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στις πλευρές του AB, $\Gamma\Delta$ τα σημεία E, Z ετσι ώστε $BE = \frac{1}{3}AB$ και $\Delta Z = \frac{1}{3}\Gamma\Delta$, αντίστοιχα. Αν H το σημείο τομής των ευθειών $A\Delta$ και EZ να αποδειχθεί ότι $\Delta A = \Delta H$ και $ZH = ZE$.

4.56 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στι ημιευθείες $B\Gamma$, ΓA τα σημεία Δ, E αντίστοιχα ετσι ώστε $\Gamma\Delta = AE = AB$. Αν Z το σημείο τομής των ευθειών AB και ΔE να αποδειχθεί ότι $AB = 3AZ$.

4.57 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} < 90^o$. Αν $A\Delta$ το ύψος του $AB\Gamma$και M το μέσο της $B\Gamma$, δείξτε ότι $AB=2M\Delta$

Μ. Γιαπαγρηγοράκης

4.58 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ=ΑΓ)$ και η μεσοκάθετη της $ΑΓ$ τέμνει το ύψος $ΑΔ$ στο Ε. Αν Ζ το συμμετρικό του Ε ως προς το μέσο Μ της $ΑΓ$ και η παρράλληλη από το Ζ προς την $ΑΒ$ τέμνει την $ΒΓ$ στο Λ , να αποδειχθεί ότι $Z\hat{E}Λ=90^o$

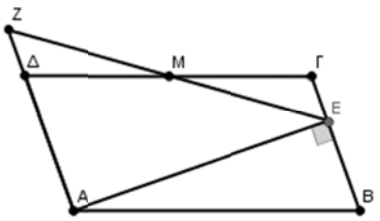
4.59 Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$, τις διαμέσους $ΑΜ$, $ΒΝ$ και τα συμμετρικά Δ, Ε των Α, Β ως προς τα Μ, Ν αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι α) τα Δ, Γ, Ε είναι συνευθειακά β) ΓΔ=ΓΕ

4.60 Δίνετε παρ/μο $ΑΒΓΔ$ με Α=120ο.και η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την $ΑΒ$ στο μέσο της Ε. Να αποδείξετε ότι α) $ΑΒ=2ΑΔ$ β) ΔΕ=2ΑΖ οπου ΑΖ είναι η απόσταση του Α από τη ΓΔ γ) Η γωνία ΔΑΓ=90ο

4.61 Δίνεται τριγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{B}=45^o$ και $<\hat{Γ}=30^o$.Αν $Δ$ είναι το μέσο της $ΑΓ$ να δειχθεί ότι $Δ\hat{B}Γ=15^o$.

4.62 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ = 2ΑΒ. Έστω Μ το μέσο της ΒΓ και σημεία Ν,Ρ στην πλευρά ΑΓ ώστε ΑΝ=ΝΡ=ΡΓ. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΜΡ είναι ορθογώνιο.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ. Έστω Ε η προβολή του Α πάνω στην ευθεία ΒΓ, Μ το μέσο της ΓΔ και Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:



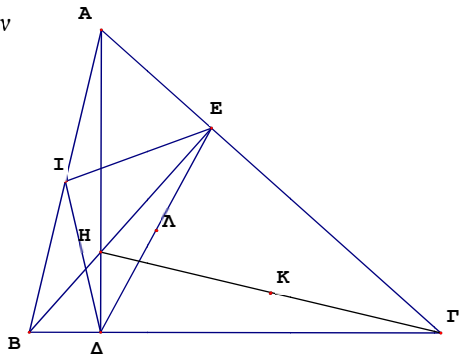
Α) τα τρίγωνα ΔΜΖ και ΓΜΕ είναι ίσα

Β) το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ορθογώνιο

Γ) το τρίγωνο ΑΜΖ είναι ισοσκελές

Δ) $A\hat{Z}M=A\widehat{M}Δ$

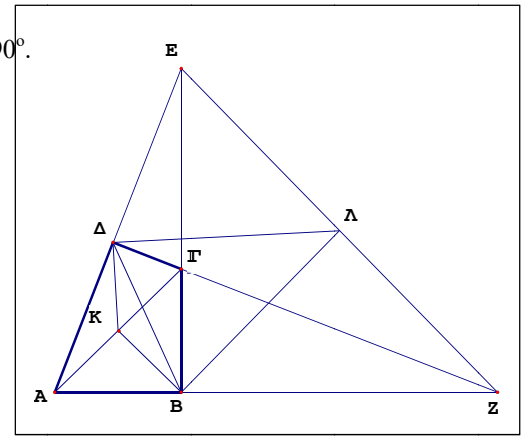
4.63 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Έστω Η το ορθόκεντρό του, Ι, Κ, Λ τα μέσα των τμημάτων ΑΒ, ΓΗ και ΔΕ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:



Α Τα τρίγωνα ΚΔΕ και ΙΔΕ είναι ισοσκελή.

Β Τα σημεία Ι, Κ ,Λ είναι συνευθειακά (βρίσκονται στην ίδια ευθεία).

4.64 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A}$, $\hat{Γ}$ παραπληρωματικές και $\hat{Δ}=90^o$.



Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Ε και οι ΑΒ και ΔΓ τέμνονται στο Ζ.

Έστω Κ, και Λ τα μέσα των ΑΓ και ΕΖ αντί-στοιχα. Να δείξετε ότι:

Α. $\hat{B}=90$

Β Τα τρίγωνα ΚΔΒ και ΛΒΔ είναι ισοσκελή.

Γ $ΑΓ \perp ΕΖ$.

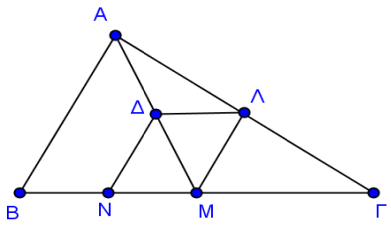
Δ Η ΚΛ μεσοκάθετος του ΒΔ

4.65 Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\Gamma = 2\,AB$. Αν M, Λ, N, Δ είναι τα μέσα των $B\Gamma, A\Gamma, BM, AM$ αντίστοιχα, τότε

Α Να δείξετε ότι $\Delta N = // = \Lambda M$

Β Να δείξετε ότι το ΔΛΜΝ είναι ρόμβος.

Γ Αν Κ το σημείο τομής των ΑΝ και ΒΔ ,να δικαιολογήσετε ότι ΒΚ=

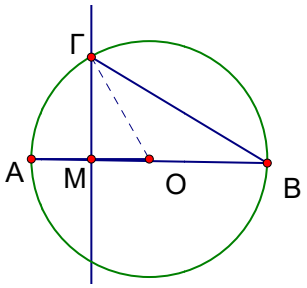


Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και μία διάμετρος του ΑΒ. Φέρουμε τη μεσοκάθετο του ΟΑ που τέμνει την ΟΑ στο Μ και τον κύκλο στο Γ.
Να αποδείξετε ότι:

Α) Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο.

Β) Η ΟΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΓΒ .

Γ) $\Gamma B = 2\Gamma M$.



4.66 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ε, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα .

Οι προεκτάσεις των τμημάτων ΕΜ και ΔΓ τέμνονται στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

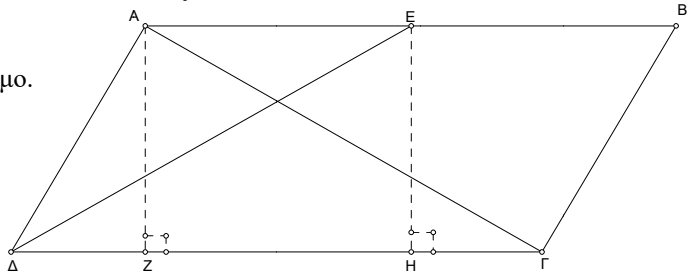
Α) Τα τρίγωνα ΕΒΜ και ΓΜΖ είναι ίσα

Β) Το τετράπλευρο ΑΕΖΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Γ) Αν η ΑΖ τέμνει τη ΒΓ στο Θ τότε:

α) Το Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΕΓΖ.

β) $\Gamma\Theta = \dfrac{B\Gamma}{3}$



4.67 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία $A = 120^o$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΒ στο μέσο της Ε και ΑΖ , ΕΗ τα κάθετα τμήματα από τα σημεία Α,Ε προς την πλευρά ΔΓ.

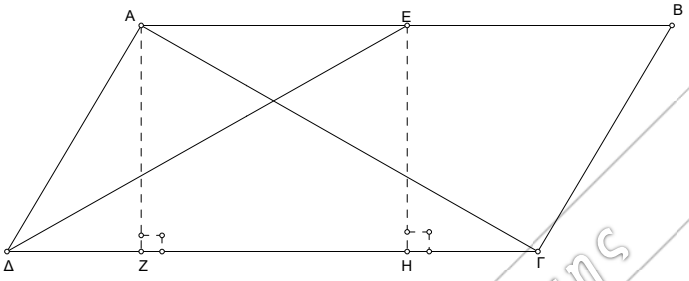
Δείξτε ότι :

Α) ΑΒ=2ΑΔ

Β) ΑΖ=ΕΗ

Γ) ΔΕ=2ΑΖ

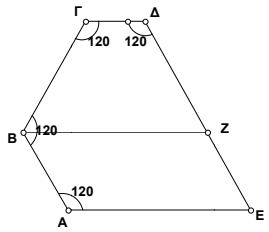
Δ) το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο



Μ. Παπαγρηγοράκης

ΤΡΑΠΕΖΙΑ – ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

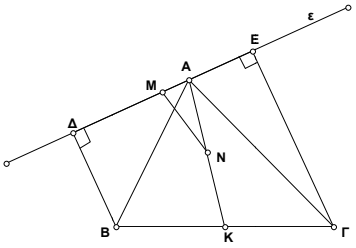
4.68 Σε πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι Α=Β=Γ=Δ=120ο . Αν ΒΖ//ΓΔ να αποδείξετε ότι:



Α) το τετράπλευρο ΒΓΔΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

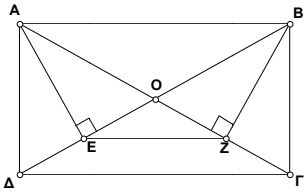
Β) ΑΒ+ΒΓ=ΕΔ

4.69 Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ε) είναι τυχαία ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ. Οι ΒΔ και ΓΕ είναι κάθετες στην (ε), το Μ είναι μέσο του ΔΕ και το Ν μέσο της διαμέσου ΑΚ. Να δείξετε ότι:



Α) $MN=\frac{AK}{2}$ Β) $K\Delta=KE$

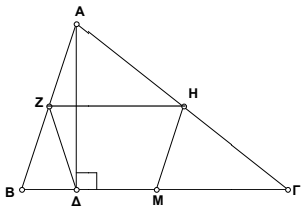
Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ κέντρου Ο φέρνουμε $AE\perp B\Delta$ και $BZ\perp A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



Α) Το τρίγωνο ΟΕΖ είναι ισοσκελές.

Β) Το τετράπλευρο ΓΔΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

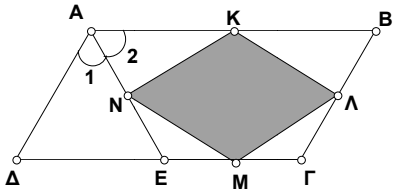
4.70 Στο διπλανό σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ και Z,M,H είναι τα μέσα των ΑΒ , ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



Α) ΔΖ=ΜΗ

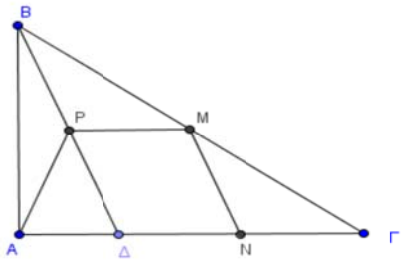
Β) Οι γωνίες ΔΖΗ και ΜΗΖ είναι ίσες.

4.71 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία Α διπλάσια της γωνίας Β. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την πλευρά ΓΔ στο Ε. Να αποδείξετε ότι τα μέσα Κ,Λ,Μ και Ν των τμημάτων ΑΒ , ΒΓ,ΓΕ και ΑΕ είναι κορυφές ρόμβου.



4.72 Δίνεται τραπέζιο ισοσκελές με τη βάση ΑΒ τριπλάσια από τη βάση ΓΔ. Αν Ε,Ζ είναι τα μέσα των ΑΓ , ΒΔ αντίστοιχα ,να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΓΔ είναι ορθογώνιο

4.73 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΗ και τη διάμεσο ΑΜ. Στις ημιευθείες ΑΗ και ΑΜ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε, αντίστοιχα , έτσι ώστε ΗΔ=ΗΑ και ΜΕ=ΜΑ. Να δείξετε ότι



Α το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές

Β Η ΒΓ// ΔΕ

Γ Το τετράπλευρο με κορυφές Β,Δ,Ε,και Γ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

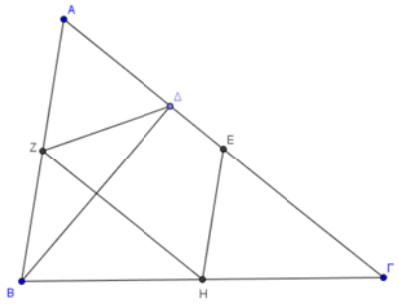
4.74 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^0)$ και Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ. Αν Μ,Ρ,Ν είναι τα μέσα των ΒΓ,ΒΔ και ΓΔ αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι:

Α. Το ΜΝΔΡ είναι παραλληλόγραμμο.

Β. ΑΡ = ΡΔ

Γ. Το ΜΝΑΡ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

4.75 Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρνουμε το ύψος ΒΔ. Αν Ζ, Η, Ε, είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, και ΑΓ αντίστοιχα, τότε



Α. Να αποδειχθεί ότι

α) Το ΑΖΔ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

β) Το ΔΕΗΖ ισοσκελές τραπέζιο.

Β. Αν επιπλέον η γωνία $A=60^0$ να αποδείξετε ότι

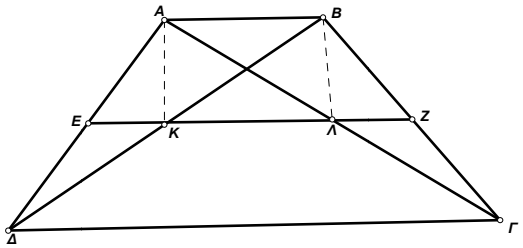
$$\Delta E=\frac{A\Gamma-AB}{2}.$$

4.76 Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ) , με ΓΔ=3ΑΒ. Αν η ΕΖ είναι η διάμεσος του τραπεζίου που τέμνει τις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι :

Γ1. $EK=\Lambda Z=\frac{\Gamma\Delta}{6}$

Γ2. ΚΛ=ΑΒ.

Γ3. Το ΑΒΛΚ είναι ορθογώνιο



4.77 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΔΓ , $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^o$, $AB=A\Delta=\frac{\Delta\Gamma}{2}$.Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι

Α) $K\Lambda=\frac{AB}{2}$

Β) $B\Lambda\perp\Delta\Gamma$

Γ) $\hat{B}=3\hat{\Gamma}$

4.78 Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Β , η οποία τέμνει την πλευρά ΓΔ στο σημείο Λ. Αν Κ το σημείο τομής της διχοτόμου ΒΛ με τη διάμεσο ΕΖ του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:

Α) τρίγωνο ΒΚΖ ισοσκελές και ΛΓ=2ΒΖ

Β) γωνία $\Lambda K\Gamma=90^0$

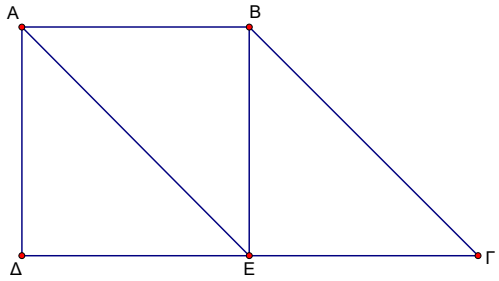
Γ) ΓΚ διχοτόμος της γωνίας Γ

4.79 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$ και $\hat{\Gamma}=30^o$. Έστω Μ μέσον του ΒΓ, Ε μέσον του ΒΜ, Ζ μέσον του ΑΒ και Η μέσον του ΑΜ. Προεκτείνουμε το ΖΕ κατά ίσο τμήμα ΕΚ. Να αποδείξετε ότι:

Μ. Παπαγρηγοράκης

α) Το τετράπλευρο **ΖΒΚΜ** είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο **ΖΒΜΗ** είναι ισοσκελές τραπέζιο.

4.80 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^0$, ΓΔ = 2ΑΒ και $\hat{\Gamma}=45^0$. Από την κορυφή Β φέρουμε τη ΒΕ κάθετη στη ΔΓ .



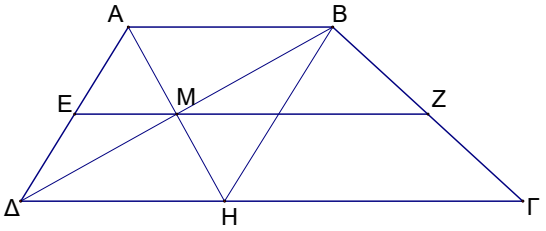
Α) Να αποδειχθεί ότι το ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Β) Το ΑΒΕΔ είναι τετράγωνο

Γ) Αν Ν το μέσο του ΑΕ και Μ το μέσο του ΒΕ να δειχθεί ότι

$NM=\frac{\Delta\Gamma}{4}$

4.81 Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε την διάμεσο ΕΖ. Η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$ τέμνει την διάμεσο στο Μ και διέρχεται από την κορυφή Β και η ΑΜ τέμνει την ΓΔ στο Η.



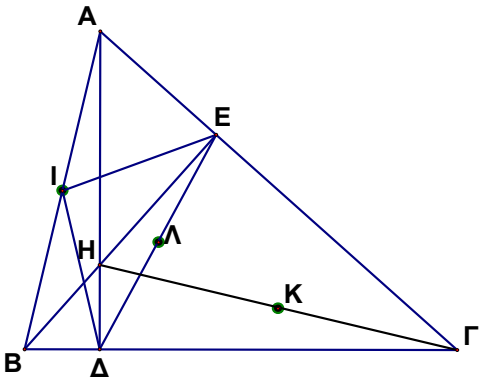
Να αποδείξετε ότι

Α. το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές

Β. το σημείο Μ είναι μέσο του ΒΔ και το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ορθογώνιο

Γ. το τετράπλευρο ΑΒΗΔ είναι ρόμβος

4.82 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Έστω Η το ορθόκεντρό του, Ι, Κ, Λ τα μέσα των τμημάτων ΑΒ, ΓΗ και ΔΕ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:



Α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ είναι ορθογώνια

Β. Τα τρίγωνα ΚΔΕ και ΙΔΕ είναι ισοσκελή.

Γ. Τα σημεία Ι, Κ ,Λ είναι συνευθειακά

4.83 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ. Προεκτείνουμε τη πλευρά ΑΔ και προς τα δύο μέρη και παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ έτσι ώστε

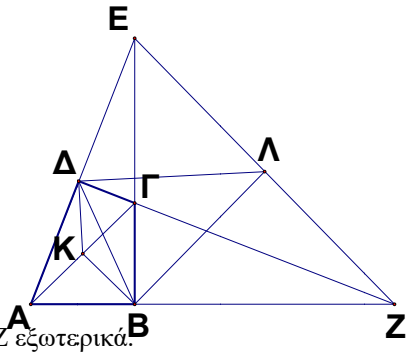
ΑΕ = ΔΖ = ΑΔ.

Α. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα ΑΓΒΕ και ΒΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμα

Β. Αν τα Κ και Λ είναι τα κέντρα των ΑΓΒΕ και ΒΓΖΔ αντίστοιχα να δείξετε ότι το ΒΓΛΚ είναι ρόμβος

Γ. Να δείξετε ότι ΒΖ ⊥ ΓΕ

4.84 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A}$, $\hat{\Gamma}$ παραπληρωματικές και $\hat{\Delta}=90^o$. Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέ-μνονται στο Ε και οι ΑΒ και ΔΓ τέμνονται στο Ζ. Έστω Κ, και Λ τα μέσα των ΑΓ και ΕΖ αντί-στοιχα. Να δείξετε ότι:



α. $\hat{B}=90^o$

β. Τα τρίγωνα ΚΔΒ και ΛΒΔ είναι ισοσκελή.

γ. ΑΓ⊥ΕΖ.

δ. Η ΚΛ μεσοκάθετος του ΒΔ

4.85 Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα ΑΒΕ εσωτερικά και ΒΓΖ εξωτερικά.

Α Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ

Β Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές,

Γ Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\Delta EZ}$

4.86 Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Β , η οποία τέμνει την πλευρά ΓΔ στο σημείο Λ. Αν Κ το σημείο τομής της διχοτόμου ΒΛ με τη διάμεσο ΕΖ του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:

Α) τρίγωνο ΒΚΖ ισοσκελές και ΛΓ=2ΒΖ

Β) γωνία $\Lambda K\Gamma=90^0$

Γ) ΓΚ διχοτόμος της γωνίας Γ

4.87 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Αν Κ, Λ ,Μ, Ν μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ, ΒΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

Α) ΚΝ=ΚΛ

Β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος

Γ) αν επιπλέον ΓΔ=3ΑΒ τότε το τετράπλευρο ΑΒΛΝ είναι ορθογώνιο.

4.88 Δίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε,Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ , ΑΔ αντίστοιχα . Φέρνουμε ΒΚ κάθετη στην ΑΕ η οποία τέμνει την ΓΖ στο Λ . Να δείξετε ότι

Α Το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο

Β Το τρίγωνο ΒΛΓ είναι ορθογώνιο

Γ Το τετράπλετρο ΑΕΛΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

4.89 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ.

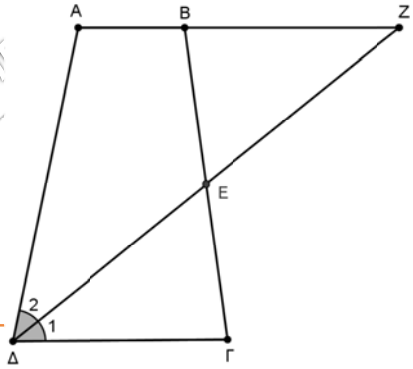
Η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΑΒ στο Ζ.

Να αποδείξετε τα επόμενα.

Α Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές .

Β ΔΓ=ΒΖ

Γ Το Ε είναι το μέσο της ΒΓ.



Μ. Γιατρουδάκης

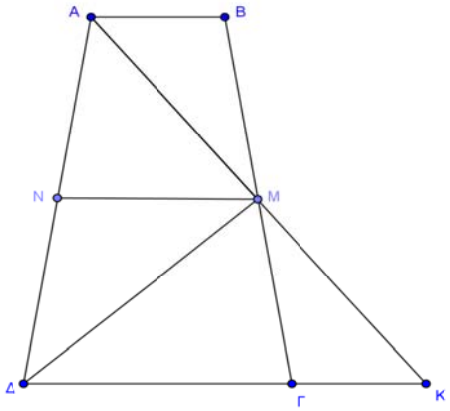
Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ// ΓΔ) ,έχουμε ΑΔ= ΑΒ+ΓΔ.
Αν Μ το μέσο του ΒΓ και Ν το μέσο του ΑΔ, να αποδείξετε ότι:

Δ_1 ΜΝ=ΑΝ.

Δ_2 Η γωνία ΑΜΔ είναι ορθή.

Δ_3 Αν η ΑΜ τέμνει την ΔΓ στο Κ,να δείξετε ότι ΑΔΚ ισοσκελές τρίγωνο.

Δ_4. Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.



4.90 Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ . Αν ΑΔ το ύψος του και Κ,Λ,Μ τα μέσα των ΑΒ ,ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα ,να δείξετε ότι

Α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΛΜ είναι ίσο με το μισό της πλευράς ΑΒ

Β) Το ΚΔΛΜ είναι τραπέζιο.

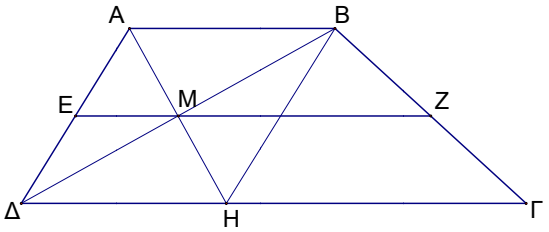
Γ) Το ΚΔΛΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

4.91 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$. Έστω Μ μέσον του ΒΓ, Ε μέσον του ΒΜ, Ζ μέσον του ΑΒ και Η μέσον του ΑΜ. Προεκτείνουμε το ΖΕ κατά ίσο τμήμα ΕΚ. Να αποδείξετε ότι:

Α) Το τετράπλευρο ΖΒΚΜ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Β) Το τετράπλευρο ΖΒΜΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

4.92 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΔΓ , $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, $AB = A\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2}$.Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι



Α) $K\Lambda = \frac{AB}{2}$

Β) $B\Lambda \perp \Delta\Gamma$

Γ) $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$

4.93 Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε την διάμεσο ΕΖ. Η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$ τέμνει την διάμεσο στο Μ και διέρχεται από την κορυφή Β και η ΑΜ τέμνει την ΓΔ στο Η.

Να αποδείξετε ότι

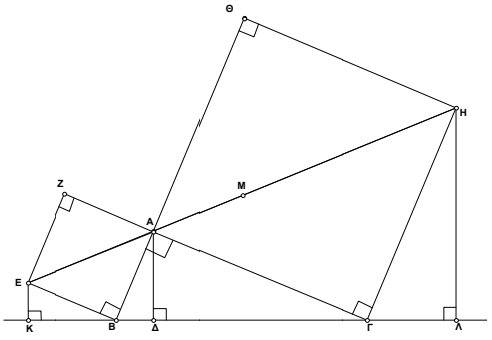
Α το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές

Β το σημείο Μ είναι μέσο του ΒΔ και το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ορθογώνιο

Γ το τετράπλευρο ΑΒΗΔ είναι ρόμβος

ΓΕΝΙΚΕΣ 5ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

4.94 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, $\left(\hat{Α}=90^{Ο}\right)$.



Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα ΑΒΕΖ και ΑΓΗΘ. Φέρουμε την ΕΚ κάθετη στη ΒΓ, την ΗΛ κάθετη στη ΒΓ και την ΑΔ κάθετη στη ΒΓ. Αν Μ είναι το μέσο της ΕΗ, να αποδείξετε ότι:

Α) Τα σημεία Ε, Α και Η είναι συνευθειακά.

Β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΕΚΒ είναι ίσα.

Γ) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΗΛΓ είναι ίσα.

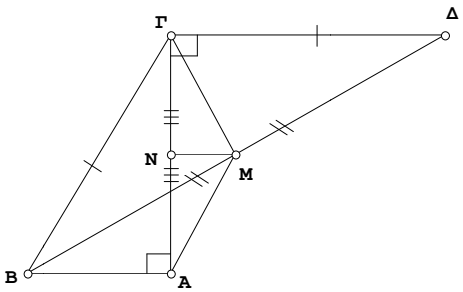
Δ) ΚΒ=ΛΓ

Ε) ΕΚ+ΗΛ=ΒΓ

Στ) Η γωνία ΒΜΓ είναι ορθή.

Ζ) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές

4.95 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\left(\hat{Α}=90^{Ο}\right)$. Φέρνουμε τμήμα $ΓΔ\perp ΑΓ$ και ίσο με ΒΓ έτσι ώστε τα σημεία Β και Δ να βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδο σε σχέση με την ΑΓ.



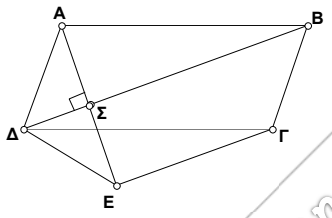
Α) Αποδείξτε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΑΒΓ$.

Β) Αν Ν είναι το μέσον του $ΑΓ$ και Μ το μέσον του ΒΔ να αποδείξετε ότι $ΜΝ\perp ΑΓ$.

Γ) Το τρίγωνο ΜΓΑ είναι ισοσκελές.

Δ) ΜΓΔ+ΒΑΜ=180ο .

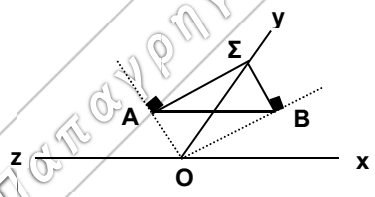
4.96 Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και το συμμετρικό Ε του Α ως προς τη διαγώνιο ΒΔ. Να δειχθεί ότι το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



4.97 Έστω οι εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ της Oy και τα τμήματα ΣΑ και ΣΒ κάθετα προς τις διχοτόμους των παραπάνω γωνιών. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{\Sigma}B=90^{0}$

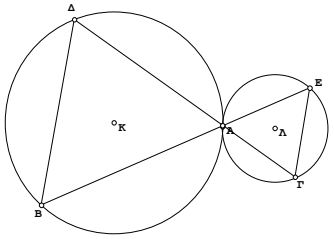
β) $AB//xz$



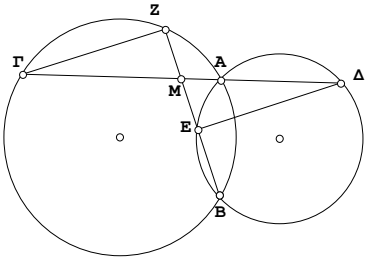
Μ. Παπαγρηγοράκης

5 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ - ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

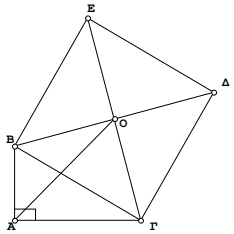
5.01 Δύο κύκλοι Κ και Λ εφάπτονται στο Α. Δύο ευθείες που περνούν από το Α τέμνουν τον κύκλο Κ στα Β και Δ και τον κύκλο Λ στα Ε και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΔ//ΓΕ.



5.02 Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B. Μια ευθεία διέρχεται από το A και τέμνει τους κύκλους στα σημεία Γ και Δ. Έστω M το μέσο του $\Gamma\Delta$. Η ευθεία BM τέμνει τους κύκλους στα σημεία E και Z. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓMZ και $EM\Delta$ είναι ίσα και ότι $ME = MZ$.



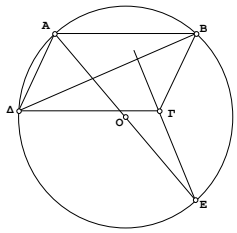
5.03 Εξωτερικά ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, $\left(\hat{A} = 90^{O}\right)$ θεωρούμε Τετράγωνο ΒΓΔΕ. Αν Ο είναι το κέντρο του τετραγώνου αυτού, να αποδειχθεί ότι η ΑΟ διχοτομεί τη γωνία Α.



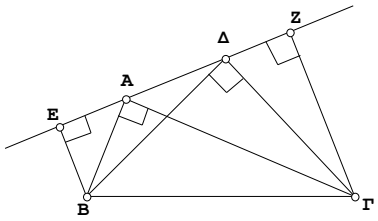
5.04 Οι κορυφές Α, Β και Δ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι σημεία του κύκλου με κέντρο Ο. Αν Ε είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Α να αποδείξετε ότι:

Α) $B\Gamma \perp \Delta E$ και $\Delta\Gamma \perp BE$.

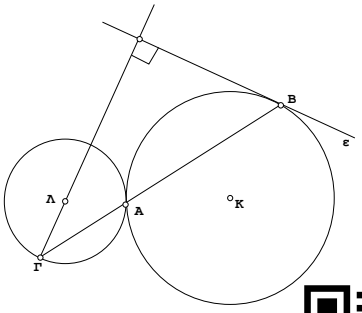
Β) $E\Gamma \perp B\Delta$



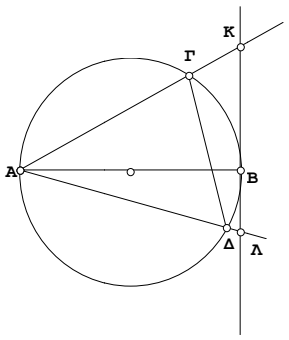
5.05 Δύο ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ έχουν κοινή υποτείνουσα ΒΓ και οι κορυφές Α και Δ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της. Αν Ε και Ζ οι προβολές των Β και Γ στην ευθεία ΑΔ να δείξετε ΑΕ=ΔΖ.



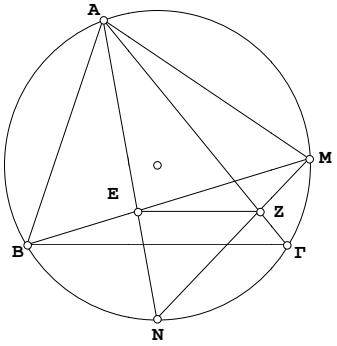
5.06 Δίνονται οι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Ευθεία που διέρχεται από το Α τέμνει τους κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν ε είναι η εφαπτομένη του κύκλου (Κ,R) στο Β, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Lambda \perp \varepsilon$



5.07 Δίνεται κύκλος (O,R) και διάμετρος ΑΒ. Εκατέρωθεν της ΑΒ φέρουμε τυχαίες χορδές ΑΓ και ΑΔ, οι οποίες τέμνουν την εφαπτομένη του κύκλου Β στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΚΛΔΓ είναι εγγράψιμο.

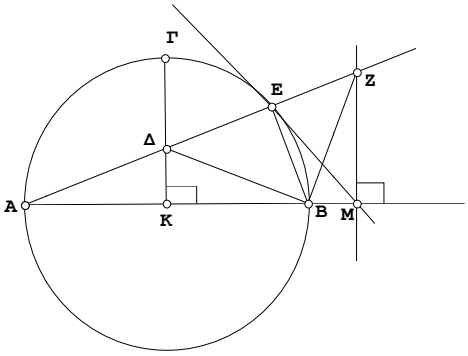


5.08 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ , ο περιγεγραμμένος κύκλος (O,R) και τυχαίο σημείο Μ του τόξου ΑΓ. Αν Ν είναι το μέσο του τόξου ΒΓ, οι ΜΒ και ΑΝ τέμνονται στο Ε και οι ΑΓ και ΜΝ τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι:



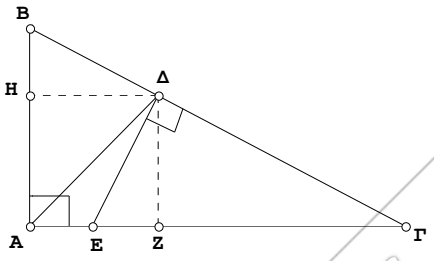
Α) Το τετράπλευρο ΑΜΖΕ είναι εγγράψιμο.
Β) ΕΖ//ΒΓ

5.09 Δίνεται κύκλος (K,R), διάμετρος ΑΒ και η ακτίνα ΚΓ κάθετη στην ΑΒ. Τυχαία ευθεία που διέρχεται από το Α τέμνει την ΚΓ στο Δ και τον κύκλο στο Ε. Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο Ε τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Μ και η κάθετη επί της ΑΒ στο Μ τέμνει την ΑΕ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:



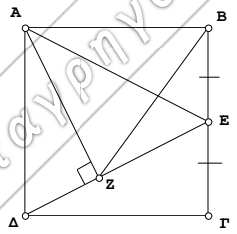
Τα τετράπλευρα ΔΚΒΕ και ΕΒΜΖ είναι εγγράψιμα.
Η γωνία ΔΒΖ είναι ορθή.

5.10 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ , $\left(\hat{A}=90^{o}\right)$. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Στο σημείο Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΒΓ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν ΔΖ και ΔΗ είναι οι αποστάσεις του Δ από τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



Α) ΔΖ=ΔΗ.
Β) Το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι εγγράψιμο.
Γ) ΔΒ=ΔΕ.

5.11 Έστω Ε το μέσον της πλευράς ΒΓ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ . Φέρνουμε ΑΖ κάθετη στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:



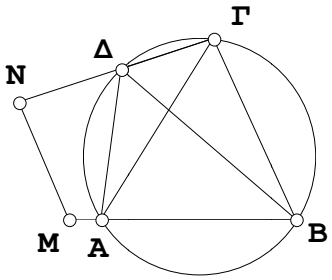
Α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα.
Β) Το τετράπλευρο ΑΖΕΒ είναι εγγράψιμο.
Γ) ΒΖ=ΒΑ

Μ. Παπαγρηγοράκης

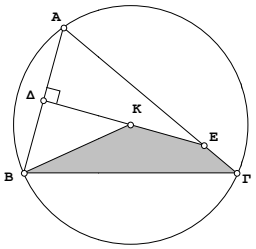
5.12 Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Στην ημιευθεία ΒΑ παίρνουμε τμήμα ΒΜ=ΒΔ και στη ΓΔ τμήμα ΓΝ=ΓΑ. Να αποδείξετε ότι:

Α) Τα σημεία Α,Μ,Ν και Δ είναι ομοκυκλικά.

Β) ΜΝ//ΒΓ.



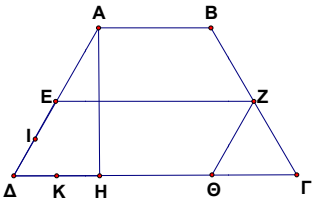
5.13 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο Κ. Από το Κ φέρνουμε ευθεία κάθετη στην ΑΒ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΚ είναι εγγράψιμο.



5.14 Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με γωνίες $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 600$. Έστω ΕΖ η διάμεσος του και ΑΗ το ύψος του. Από το Ζ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά ΑΔ που τέμνει την πλευρά ΓΔ στο Θ. Να αποδείξετε ότι:

Α) Το τετράπλευρο ΗΘΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Β) Αν Κ, Ι είναι τα μέσα των τμημάτων ΔΗ, ΔΕ αντίστοιχα τότε το τετράπλευρο ΙΚΗΕ είναι εγγράψιμο.

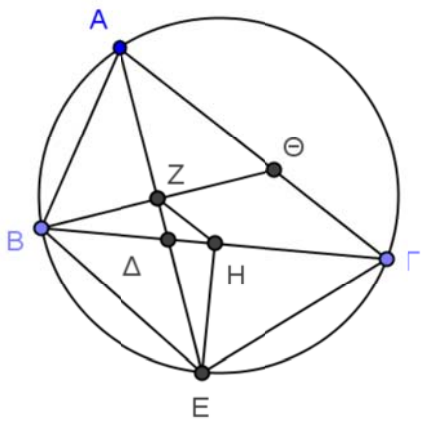


5.15 Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90$) και η διχοτόμος ΑΔ αυτού. Φέρνουμε από το Δ κάθετη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την ΑΒ στο Ρ. Να αποδείξετε ότι ΔΖ=ΔΒ και ΔΡ=ΔΓ

5.16 Δίνεται κύκλος (Κ,ρ).Αν ΑΒ μια χορδή του κύκλου (Κ,ρ) και Μ το μέσο του τόξου ΑΒ να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις του Μ από τις ακτίνες ΚΑ και ΚΒ είναι ίσες με το μισό του μήκους της χορδής

5.17 Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90$) και φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΚ. Αν η κάθετη από το Κ προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο Λ και την ΑΒ στο Μ, να αποδείξετε ότι ΚΒ=ΚΛ και ΚΜ=ΚΓ

5.18 Κύκλος με κέντρο Κ εφάπτεται σε άλλον κύκλο με κέντρο Λ στο σημείο Α. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο Κ στο σημείο Β. Αν η ΒΑ τέμνει τον κύκλο Λ στο σημείο Γ, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Lambda \perp (\varepsilon)$.



5.19 Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και η διχοτόμος του ΑΔ τέμνει τον κύκλο στο Ε.

Θεωρούμε ακόμη τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΘ και ΕΗ ώστε $B\Theta \perp A\Delta$ και $EH \perp B\Gamma$.

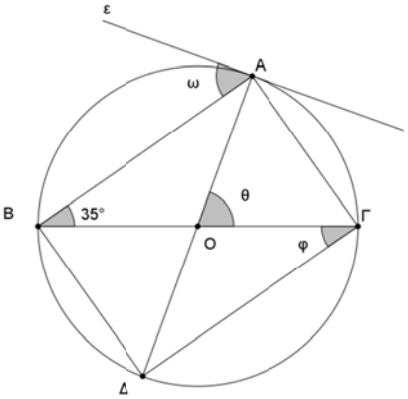
Α) Αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές.

Β) Να δείξετε την ισότητα $AB = A\Theta$.

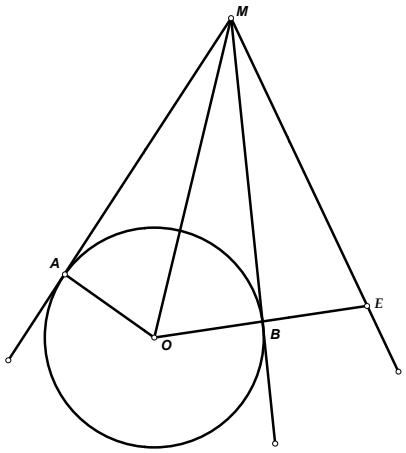
Γ) Αποδείξετε ότι είναι $ZH \parallel A\Gamma$.

Δ) Να δείξετε την ισότητα $ZH = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$

5.20 Στο διπλανό σχήμα ΒΓ, ΑΔ είναι διάμετροι και ε εφαπτομένη του κύκλου. Να υπολογίσετε:



α) τη γωνία θ
β) τη γωνία φ
γ) τη γωνία ω.



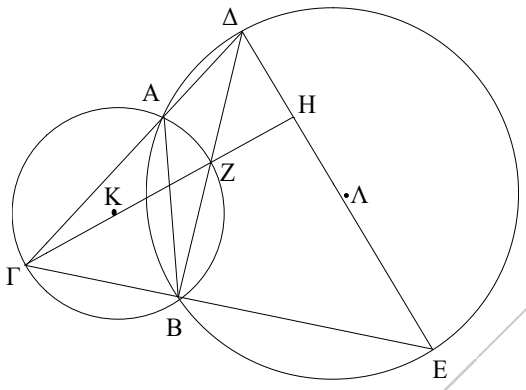
5.21 Από σημείο Μ εξωτερικό κύκλου (Ο, R) φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ , ΜΒ του κύκλου. Προεκτείνουμε το ΟΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΟΒ.

Α Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΜΕ είναι ισοσκελές.

Β Να αποδείξετε ότι: $A\hat{M}E = 3 \cdot B\hat{M}E$

Γ Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο.

5.22 Στο διπλανό σχήμα δίνονται δύο κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) με $\rho_2 > \rho_1$, που τέμνονται στα Α και Β. Έστω Γ τυχαίο σημείο του (Κ, ρ_1) και ΑΒ η κοινή χορδή. Οι χορδές ΓΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνουν τον κύκλο (Λ, ρ_2) στα Δ και Ε αντίστοιχα, η ΔΒ τέμνει τον (Κ, ρ_1) στο Ζ και η προέκταση της ΓΖ τέμνει την ΔΕ στο Η.



Α) Να αποδείξετε ότι : $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{Z}H$.

Β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΒΕΗ είναι εγγράψιμο.

5.23 Σε επίπεδο, θεωρούμε ευθ. τμήμα ΑΓ με μήκος 10cm, Ο το μέσο του ΑΓ και τα σημεία Β και Δ έτσι ώστε : να βρίσκονται εκατέρωθεν της ΑΓ ,

$OB = O\Delta = 5cm$

$A\hat{\Gamma}\Delta = \dfrac{1}{2}$ της ορθής και $A\hat{\Gamma}B = 30^o$.

Να δείξετε ότι

Α το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.

Β $AB = 5cm$ και $A\Delta = \Delta\Gamma$

Γ αν Μ το μέσο της ΒΔ τότε $OM \perp B\Delta$

Δ $O\hat{B}\Delta = A\hat{O}M = 15^o$.

Μ. Παπαγρηγοράκης

5.24 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ = 2 ΑΒ. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ . Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Ν και Ρ έτσι ώστε ΑΝ = ΝΡ = ΡΓ. Να αποδειχθεί ότι:

Α) ΜΡ // ΒΝ

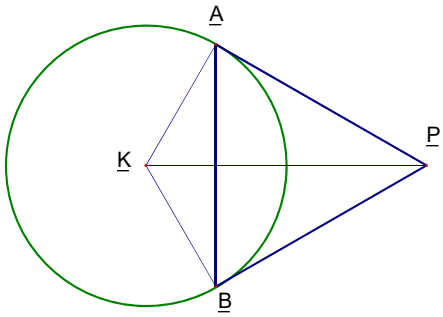
Β) Η ευθεία ΒΝ διέρχεται από το μέσο του ΑΜ

Γ) Η ΒΝ είναι κάθετη στην ΑΜ.

Δ) Η γωνία ΑΜΡ είναι ορθή.

Ε) Αν η γωνία ΜΑΓ είναι ίση με 30° , τότε ΒΝ = 2ΡΓ .

5.25 Έστω (Κ, ρ) κύκλος και σημείο Ρ, στο επίπεδό του, τέτοιο ώστε ΚΡ =2ρ. Φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ.



Να αποδείξετε ότι:

Α. $A\hat{P}K = 30^o$

Β. $A\hat{K}B = 120^o$

Γ. το ΡΑΒ είναι ισόπλευρο

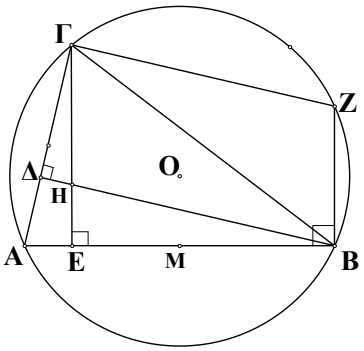
5.26 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 3\cdot\hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = 2\cdot\hat{\Gamma}$

Α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ

Β) Αν ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ τότε :

i) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{A}M = 30^o$

ii) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$



5.27 Στο διπλανό σχήμα είναι (O,R) ο περιγεγραμμένος στο τρίγωνο ΑΒΓ, κύκλος, ΒΔ , ΓΕ τα ύψη του ΑΒΓ και ΒΖ⊥ΑΒ. Να δείξετε ότι:

Α η ΑΖ διάμετρος του κύκλου

Β το ΒΗΓΖ παραλληλόγραμμο,

Γ Το $OM = \frac{1}{2}\Gamma H$, Μ το μέσο της ΑΒ