ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 62.

Α2. **α** → Λάθος **β** → Λάθος **γ** → Σωστό **δ** → Λάθος **ε** → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. **α.** **1ος τρόπος**

$$A=\left[\frac{(xy)^3}{xy^6}\right]^{-1}:\left(\frac{y}{x}\right)^3=\left[\frac{xy^6}{(xy)^3}\right]^1:\frac{y^3}{x^3}=\frac{xy^6}{(xy)^3}\cdot\frac{x^3}{y^3}=\frac{xy^6x^3}{x^3y^3y^3}=$$

$$=\frac{x^4y^6}{x^3y^6}=\frac{x^4}{x^3}=x$$

2ος τρόπος

$$A=\left[\frac{(xy)^3}{xy^6}\right]^{-1}:\left(\frac{y}{x}\right)^3=\frac{\left[(xy)^3\right]^{-1}}{\left(xy^6\right)^{-1}}:\frac{y^3}{x^3}=\frac{(xy)^{-3}}{\left(xy^6\right)^{-1}}\cdot\frac{x^3}{y^3}=\frac{x^{-3}y^{-3}}{x^{-1}y^{-6}}\cdot\frac{x^3}{y^3}=$$

$$=\frac{x^{-3}y^{-3}x^3}{x^{-1}y^{-6}y^3}=\frac{x^0y^{-3}}{x^{-1}y^{-3}}=\frac{1}{x^{-1}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

β. **1ος τρόπος**

$$B=-(2-y)(y-2)+8y=(y-2)(y-2)+8y=(y-2)^2+8y=$$

$$=y^2-4y+4+8y=y^2+4y+4=(y+2)^2$$

<u>2ος τρόπος</u>

$$\mathrm{B}=-(2-y)(y-2)+8y=-\left(2y-4-y^2+2y\right)+8y=$$
$$=-\left(4y-y^2-4\right)+8y=-4y+y^2+4+8y=$$
$$=y^2+4y+4=(y+2)^2$$

γ. **<u>1ος τρόπος</u>**

$$\Gamma=\left(1+\omega^2\right)^2-\left(1-\omega^2\right)^2=\left[1+\omega^2+1-\omega^2\right]\cdot\left[1+\omega^2-\left(1-\omega^2\right)\right]=$$
$$=2\left(1+\omega^2-1+\omega^2\right)=2\cdot 2\omega^2=4\omega^2$$

<u>2ος τρόπος</u>

$$\Gamma=\left(1+\omega^2\right)^2-\left(1-\omega^2\right)^2=1+2\omega^2+\left(\omega^2\right)^2-\left[1-2\omega^2+\left(\omega^2\right)^2\right]=$$
$$=1+2\omega^2+\omega^4-1+2\omega^2-\omega^4=2\omega^2+2\omega^2=4\omega^2$$

Β2. Ισχύει: $\left(|\mathrm{A}|-1\right)^2+\mathrm{B}+\Gamma=0\Leftrightarrow$

$$\left(|x|-1\right)^2+(y+2)^2+4\omega^2=0 \qquad (1)$$

Επειδή $\left(|x|-1\right)^2\geq 0$ και $(y+2)^2\geq 0$ και $4\omega^2\geq 0$ από (1) προκύπτουν:

$$\left(|x|-1\right)^2=0\Leftrightarrow |x|-1=0\Leftrightarrow |x|=1\Leftrightarrow\begin{cases}\boxed{x=-1} & \text{ΔΕΚΤΗ αφού } x<0\\ \text{ή} & \\ x=1 & \text{ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ αφού } x<0\end{cases}$$

και

$$(y+2)^2=0\Leftrightarrow y+2=0\Leftrightarrow \boxed{y=-2}\ \text{ΔΕΚΤΗ}$$

και

$$4\omega^2=0\Leftrightarrow \omega^2=0\Leftrightarrow \boxed{\omega=0}\ \text{ΔΕΚΤΗ}$$

Άρα $(x,\ y,\ \omega)=(-1,\ -2,\ 0)$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

$A \cup B$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει ένα τουλάχιστον από τα δύο χόμπι.

Τότε από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτουν:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{60}{200}=\frac{3}{10}=0,3$$

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{160}{200}=\frac{8}{10}=0,8$$

$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{180}{200}=\frac{9}{10}=0,9$$

Γ1. **α.** $A \cap B$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει και τα δύο χόμπι.
Από τον προσθετικό νόμο ισχύει:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$0,9=0,3+0,8-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$P(A\cap B)=1,1-0,9\Leftrightarrow$$

$$\boxed{P(A\cap B)=0,2}$$

β. $P(B')=1-P(B)\Leftrightarrow$

$$P(B')=1-0,8\Leftrightarrow$$

$$\boxed{P(B')=0,2}$$

οπότε $\boxed{P(B')=P(A\cap B)}$

Γ2. **α.** $B - A$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να ασχολείται μόνο με υπολογιστές.
Τότε:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$P(B-A)=0,8-0,2\Leftrightarrow$$

$$\boxed{P(B-A)=0,6}$$

β. $(A\cup B)'$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μην έχει κανένα από τα δύο παραπάνω χόμπι.
Τότε:

$$P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)\Leftrightarrow$$

$$P(A\cup B)'=1-0,9\Leftrightarrow$$

$$\boxed{P(A\cup B)'=0,1}$$

Γ3. **α.** $(A-B)\cup(B-A)$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να ασχολείται μόνο με ένα από τα δύο παραπάνω χόμπι.
Τότε:

$$P((A-B)\cup(B-A))\underset{\text{ασυμβίβαστα}}{\overset{A-B,\ B-A}{=}}$$

$$P(A-B)+P(B-A)=$$

$$P(A)-P(A\cap B)+0,6=$$

$$0,3-0,2+0,6=0,7$$

Άρα $\boxed{P((A-B)\cup(B-A))=0,7}$

β. $A'\cup B'$ ή $(A\cap B)'$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μην ασχολείται με υπολογιστές ή να μην ασχολείται με τον αθλητισμό.

<u>1ος τρόπος</u>

$$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')=$$

$$P(A')+P(B')-P(A'-B)=$$

$$P(A')+P(B')-(P(A')-P(A'\cap B))=$$

$$P(A')+P(B')-P(A')+P(A'\cap B)=$$

$$P(B')+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$1-P(A\cap B)=$$

$$1-0,2=0,8$$

Άρα $\boxed{P(A'\cup B')=0,8}$

2ος τρόπος

$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' =$

$1 - P(A \cap B) =$

$1 - 0,2 = 0,8$

Άρα $\boxed{P(A' \cup B') = 0,8}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $\alpha \geq 1$ έχουμε,

$$A = \sqrt{\alpha - 2\sqrt{\alpha-1}}^{\,2} - 2\sqrt{\alpha - 2\sqrt{\alpha-1}} \cdot \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha-1}} + \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha-1}}^{\,2} =$$

$$\alpha - 2\sqrt{\alpha-1} - 2\sqrt{\alpha^2 - \left(2\sqrt{\alpha-1}\right)^2} + \alpha + 2\sqrt{\alpha-1} =$$

$$2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 - 4(\alpha-1)} =$$

$$2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4} =$$

$$2\alpha - 2\sqrt{(\alpha-2)^2} =$$

$$2\alpha - 2|\alpha - 2|$$

$$B = \left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[8]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[8]{\alpha}-1\right) =$$

$$\left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[8]{\alpha}^{\,2}-1^2\right) =$$

$$\left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}-1\right) =$$

$$\left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}^{\,2}-1^2\right) =$$

$$\left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt{\alpha}-1\right) =$$

$$\sqrt{\alpha}^{\,2} - 1^2 =$$

$$\alpha - 1$$

Δ2. Αφού $\alpha \geq 2$ είναι $\alpha - 2 \geq 0$. Επομένως $|\alpha - 2| = \alpha - 2$

Άρα $A = 2\alpha - 2(\alpha - 2) = 2\alpha - 2\alpha + 4 = 4$

α. $|A + B| = |4 + \alpha - 1| = |\alpha + 3| = \alpha + 3$ αφού για $\alpha \geq 2$ είναι $\alpha + 3 > 0$

β. Είναι $\alpha^2 x = |A+B| + 4x - 1$ και αφού $|A+B| = \alpha + 3$ είναι

$\alpha^2 x = \alpha + 3 + 4x - 1$ ή

$\alpha^2 x - 4x = \alpha + 2$ ή

$(\alpha^2 - 4)x = \alpha + 2$ ή

$(\alpha+2)(\alpha-2)x = \alpha + 2$

Είναι $\alpha \geq 2$ επομένως $\alpha + 2 \neq 0$. Διαιρώντας την τελευταία σχέση με α + 2 έχουμε $(\alpha-2)x = 1$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha - 2 = 0$ δηλαδή αν α = 2 η εξίσωση γίνεται $0x = 1$ που είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha \neq 2$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{1}{\alpha-2}$

Δ3. **<u>1^ος^ τρόπος</u>**

Είναι $x_0 = \dfrac{1}{\alpha-2}$ για $\alpha > 2$

Έχουμε $x_0^{\,2} = \left(\dfrac{1}{\alpha-2}\right)^2 > 0$, για κάθε $\alpha > 2$

Διαιρούμε με $x_0^{\,2} > 0$ και τα δύο μέλη της $(x_0 - 1)^2 + x_0^{\,2} > (6-2\alpha)x_0^{\,2}$ και έχουμε

$$\left(\frac{x_0 - 1}{x_0}\right)^2 + \frac{x_0^{\,2}}{x_0^{\,2}} > 6 - 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^2 + 1 - 6 + 2\alpha > 0 \overset{x_0 = \frac{1}{\alpha-2}}{\Leftrightarrow}$$

$$[1 - (\alpha-2)]^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \alpha + 2)^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$(3 - \alpha)^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$9 - 6\alpha + \alpha^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 2)^2 > 0 \quad \text{που είναι αληθής για } \alpha > 2$$

2ος τρόπος

Για $x_0=\frac{1}{\alpha-2}$ έχουμε

$$(x_0-1)^2+x_0^2>(6-2\alpha)x_0^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{1}{\alpha-2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>(6-2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{1}{\alpha-2}-\frac{\alpha-2}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>(6-2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{1-\alpha+2}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>(6-2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>(6-2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2-2(3-\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>0 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}-\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>0 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{3-\alpha-1}{\alpha-2}\right)^2>0 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{2-\alpha}{\alpha-2}\right)^2>0 \Leftrightarrow$$
$$(-1)^2>0 \Leftrightarrow$$

$1>0$ που ισχύει

3ος τρόπος

Το 1ο μέλος της δοθείσας σχέσης για $x_0=\frac{1}{\alpha-2}$ γίνεται

$$(x_0-1)^2+x_0^2=$$
$$\left(\frac{1}{\alpha-2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{1-(\alpha-2)}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{1-\alpha+2}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq \gamma$ ισχύει:

$$(\beta-\gamma)^2>0 \Leftrightarrow \beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2>0 \Leftrightarrow \beta^2+\gamma^2>2\beta\gamma \qquad (2)$$

Έστω $\beta=\dfrac{3-\alpha}{\alpha-2}$ και $\gamma=\dfrac{1}{\alpha-2}$ με $\alpha-2\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 2$

Αν $\beta=\gamma \Leftrightarrow \dfrac{3-\alpha}{\alpha-2}=\dfrac{1}{\alpha-2} \Leftrightarrow 3-\alpha=1 \Leftrightarrow 3-1=\alpha \Leftrightarrow \alpha=2$ άτοπο

Άρα $\beta\neq\gamma$

Τότε για κάθε $\alpha>2$ λόγω της (2), από την (1) έχουμε:

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>2\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>\frac{2(3-\alpha)}{(\alpha-2)^2}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>(6-2\alpha)\frac{1}{(\alpha-2)^2}\overset{x_0=\frac{1}{\alpha-2}}{\Leftrightarrow}$$

$$(x_0-1)^2+x_0^2>(6-2\alpha)x_0^2 \text{ για κάθε } \alpha>2$$